2. MINTA ZÁRTHELYI

Analízis 2.
MATEMATIKA BSc

2024. május 13.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

Név:

Neptun kód: | | | | | | |

1.	2.	3.	4.	5*.	$\sum$

---

1. (**10 pont**) Definiáljuk egy tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ halmaz mértékét a következő módon:

$$\mu(A) = |A \cap \{x : 10x \in \mathbb{Z}\}|.$$

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális, vagy } x = 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } x = \frac{m}{n},\ (m,n) = 1,\ n > 0. \end{cases}$$

Számoljuk ki a $\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\,\mu$ integrált!

2. (**10 pont**) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $f : X \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, melyre $f(x) > 0$ m.m. $x \in X$-re. Mutassuk meg, hogy ha A egy mérhető halmaz, melyre $\int_A f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$, akkor $\mu(A) = 0$.

3. (**15 pont**) Alapos indoklás után határozzuk meg a következő határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^{\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2024)}}} \,\mathrm{d}\,x.$$

4. (**15 pont**)Mutassuk meg, hogy

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2} \,\mathrm{d}\,x \le \sqrt[3]{6}.$$

5. (**10 pont - BÓNUSZ**)

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér. Minden f, g mérhető függvénypárra legyen

$$d(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} \, \mathrm{d}\, \mu.$$

(a) Mutassuk meg, hogy d metrika a mérhető függvények terén.

(b) Mutassuk meg, hogy ha (f_n) mérhető függvények egy sorozata, akkor $f_n \xrightarrow{\mu} f$ pontosan akkor, ha $d(f_n, f) \to 0$.