Analízis 2.
Mintavizsga - I. rész
2024.május 29.

Név:
Neptun kód:

I.	II.	$\sum$:

Tudnivalók:

1. A munkaidő 60 perc.
2. A megoldáshoz segédeszköz nem használható.
3. A I. feladatban az előadáson elhangzott formában kérjük a tételeket és a definíciókat kimondani. **A sikeres vizsgához legalább 8 kérdésre helyesen kell válaszolni.**
4. A II. feladatban nem kell indokolni!
5. Csak a kiadott dolgozat lapjain lehet dolgozni.

(12×3 p.) **I. A minimumkövetelményből**

1. Definiálja egy halmazsorozat lim sup-ját!

2. Mit értünk külső mérték alatt?

3. Mondja ki a Carathéodory-tételt!

4. Definiálja a függvények mérhetőségét!

5. Mondja ki a dominált konvergencia tételt (nagy Lebesgue-tétel)!

6. Mondja ki a Fubini-tételt!

7. Mondja ki a Fatou-lemmát!

8. Mit állít a Hölder-egyenlőtlenség?

9. Definiálja a Fourier-sor fogalmát!

10. Mit állít a Fourier-sorokra vonatkozó Fejér-tétel?

11. Definiálja a Schwarz-teret $\mathbb{R}$-en!

12. Definiálja két függvény konvolúcióját!

(14×1 p.) **II. Igaz vagy Hamis?** Az állítás előtti I vagy H betűt karikázza be, annak megfelelően, hogy az állítás igaz vagy hamis.

1. I H $\mathbb{R}$ nyílt intervallumai σ-algebrát alkotnak.
2. I H A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.
3. I H Van olyan Borel-halmaz, ami nem Lebesgue-mérhető.
4. I H A Cantor-halmaz bármely részhalmaza Lebesgue-mérhető.
5. I H Mérhető függvények sorozatának pontonkénti limesze mindig mérhető.
6. I H Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren a nemnegatív, μ-majdnem mindenütt értelmezett f függvényre fennáll, hogy $\int f \, \mathrm{d}\, \mu = 0$, akkor $f = 0$ μ-m.m.
7. I H Egy nullmértékű halmaz bármely részhalmaza nullmértékű.
8. I H Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és f egy mérhető függvény, melyre $\int_X f \, \mathrm{d}\, \mu = 0$, akkor $f = 0$ μ-m.m.
9. I H Az $f(x) = \sin x \cos x$ függvény Fourier-sora nem tartalmaz cos-os tagokat, azaz $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N}.)$
10. I H Bármely $[a, b]$-n integrálható függvény esetén $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, \mathrm{d}\, x = 0$.
11. I H Két integrálható függvény konvolúciójának Fourier-transzformáltja egyenlő a Fourier-transzformáltjaik konvolúciójával.
12. I H A polinomok sűrűn vannak a Schwarz-térben.
13. I H Az $L^p(X, \mu)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ térben érvényes a sorozatokra vonatkozó Cauchy-kritérium.
14. I H Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér. Ekkor ha $1 \leq p < q < \infty$, akkor $L^p(X, \mu) \subset L^q(x, \mu)$.