Analízis 2 tételsor

2023/24 2. félév

A **vastag betűvel** szedett tételek bizonyítását tudni kell!

1. **Halmazrendszerek.**
   Halmazok algebrája, σ-algebra, mérhető tér. Halmazrendszer által generált σ-algebra, Borel σ-algebra, halmaz, amely nem Borel. $\mathcal{G}_\delta$ és $\mathcal{F}_\sigma$ halmazok, példa halmazra, ami nem $\mathcal{G}_\delta$ illetve nem $\mathcal{F}_\sigma$. Monoton növő illetve monoton fogyó halmazsorozatok, limeszük. Halmazsorozat $\limsup$-ja és $\liminf$-je. Gyűrű, félgyűrű, σ-gyűrű.

2. **Mértékek.**
   Mérték, mértéktér. **Mérték alaptulajdonságai.** Nullmértékű halmaz, valamely tulajdonság m.m. teljesülése, teljes mérték. Külső mérték. Halmaz mérhetősége, Carathéodory-tétel. Halmazfüggvény által generált külső mérték, premérték.

3. **Lebesgue-mérték a számegyenesen.**
   Lebesgue-mérték konstrukciója, tulajdonságai, összehasonlítása a Jordan-mértékkel. **Minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető.** Mérték és topológia, nyílt halmazok struktúratétele $\mathbb{R}$-ben, Radon-mértékek. Approximációs-tétel. **Cantor-halmaz tulajdonságai. Példa nem Lebesgue-mérhető halmazra.** A Lebesgue-Stjieltjes mérték, mérték eloszlásfüggvénye. A Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^n$-en.

4. **Mérhető függvények alaptulajdonságai.**
   Mérhető függvények, Borel-függvények. **Mérhető függvények karakterizációja, tulajdonságai.** Mérhetőség és folytonosság kapcsolata, Luzin-tétel. Cantor-féle szinguláris függvény, példa nem Borel-mérhető halmazra.

5. **Mérhető függvények sorozatai.**
   Mérhető függvények sorozatának pontonkénti határértéke mérhető függvény. Mértékben való konvergencia. A μ-m.m. illetve a mértékben való konvergencia kapcsolata, **Lebesgue-tétel.** A μ-m.m. és az egyenletes konvergencia kapcsolata, **Jegorov-tétel, Riesz kiválasztási tétele.** Egyszerű függvények, **Approximációs lemma.**

6. **Az integrál.**
Nemnegatív mérhető függvények integrálja. **Monoton konvergencia tétel (Beppo-Levi). Az integrál és a szumma, illetve az integrál és a limesz felcserélhetősége. Fatou-lemma.** Valós és komplex értékű függvények integrálja. **A $L^1(X, \mu)$ tér és tulajdonságai. Dominált konvergencia tétel (Nagy Lebesgue).** Az integrál σ-additívitása és abszolút folytonossága. Paraméteres integrálok deriválása. A Lebesgue-integrál és a Riemann-integrál kapcsolata. Fubini-tétel.

7. **L^p-terek.**
Az $\mathcal{L}^p$ és az L^p terek. **Hölder-egyenlőtlenség. Minkowski-egyenlőtlenség. Az L^p tér teljessége (Riesz-Fischer tétel).** Az L^p terek „furcsaságai” $0 < p < 1$ esetén (nem tartalmaz valódi konvex nyílt halmazt, duális tere, stb).

8. **Fourier-analízis.**
Fourier-sorfejtés. **Riemann-Lebesgue lemma.** Fourier-sor részletösszegei, Dirichlet-féle magfüggvény, Dirichlet-formula. Fourier-sor pontonkénti és egyenletes konvergenciájának feltételei. Dini-féle kritérium. Fejér-tétel. Fourier-transzformáció definíciója és alaptulajdonságai. Konvolúció és tuéajdonságai. **A Fourier-transzformáció kapcsolata a konvolúcióval.** Schwarz-tér. Fourier-transzformáció a Scwarz-téren.

Ajánlott irodalom

- Járai Antal, Mérték és integrál
  Nemzeti Tankönyvkiadó

- Magyarkuti Gyula, Mértékelmélet és dinamikus programozás
  http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_17_MAGYARKUTI_Mertekelmelet.pdf

- Mérték- és integrálelmélet (Nagy Gergő jegyzete Molnár Lajos előadásai nyomán)
  http://math.unideb.hu/media/nagy-gergo/Mertek-es_integralelmelet.pdf

- Gerald B. Folland, Real Analysis / Modern Techniques and Their Applications
  John Wiley & Sons Inc.

- Donald L. Cohn, Measure Theory
  Birkhäuser

- Richard F. Bass, Real Analysis for Graduate Students: Measure and Integration Theory
  http://bass.math.uconn.edu/3rd.pdf

- Terence Tao, An introduction to measure theory
  https://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf
- Simon Péter, Fourier-transzfomáció
  https://www.inf.elte.hu/dstore/document/300/Simon-Peter-Fourier-transzformacio.pdf