①

A Fourier-transzformáció

<u>Megj</u>: Hogyan változnak a Fourier-sor képletei, ha 2π helyett $2p$ $(p>0)$ periodikus függvényeket tekintünk?

$t \mapsto \frac{\pi}{p} t$ lineáris transzformációval áttérhetünk $[-p, p)$ intervallumról $[-\pi, \pi)$-re:

↳ $\left\{1, \cos \frac{k\pi}{p} x, \sin \frac{k\pi}{p} x\right\}$ ortogonális rendszer lesz

↳ Ha $f(x+2p) = f(x)$, akkor f Fourier-sora:

$$\boxed{f \sim \Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x\right),}$$

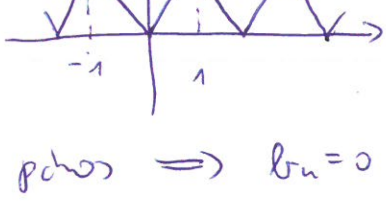
ahol

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x \, dt \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x \, dt \end{aligned}}$$

<u>Példa</u>: $f(t) = |t|$ ha $-1 \le t \le 1$ + periodikus kiterjesztés

$\Downarrow$

$\boxed{p=1}$



• f páros $\Rightarrow b_n = 0$

• $a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} |t| \cos n\frac{\pi}{p} t \, dt = 2 \int_0^1 t \cos n t \, dt \underset{\text{parc. int.}}{=} \overset{0}{\overset{\parallel}{\left[t \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1}} - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi t) \, dt \;(=)$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{2}{n\pi}\left[t\,\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ ps} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2}, & \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases}$$

↳ $$|t| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$$

(mert f páros)

2p periodikus függvény esetén a Fourier-sor komplex alakja:

$$f \sim \Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{in\frac{\pi}{p}x}, \quad \text{ahol}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-in\frac{\pi}{p}t}\, dt.$$

Cél: Szeretnénk kiterjeszteni a „Fourier-sort" nem periodikus függvényekre is.

⇓

Ötlet: $p \to \infty$ átmenettel 2p-periodikus függvényekből megkaphatjuk $\mathbb{R}$-en értelmezett nem periodikus függvény esetét.

③

$$f(\cancel{x}) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i\frac{n\pi}{p}x} = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\frac{n\pi}{p}t} dt\right) e^{in\frac{\pi}{p}x}$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{p}, \quad \Delta\omega_n := \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{p}, \quad h(\omega) := \int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\hookrightarrow$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t) e^{-in\frac{\pi}{p}t} dt\right) e^{in\frac{\pi}{p}x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\omega_n \int_{-p} f(t) e^{-i\omega_n t} dt\right) e^{i\omega_n x} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n}_{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega}$$

integrál Riemann-féle integrálközelítő összege

Ha $n\to\infty$, akkor $\Delta\omega_n \to 0$ $\quad (p\to\infty)$

$\hookrightarrow$ $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, ahol $h(\omega) = \int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

$\Downarrow$

Def: Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ekkor f Fourier-transzformáltja:

$$\hat{f}(\omega) \equiv \mathcal{F}f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

(5)

Megj. • a definíció értelmes, mert $|e^{-i\omega t}|=1$, így az integrál Lebesgue-értelemben létezik.

• szokásos elnevezés

$f(t)$: időben változó jel

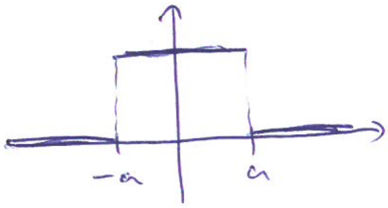
$\Downarrow$

$\hat{f}(\omega)$: frekvenciatartományban felírt jel

($\hat{f}(\omega)$: komplex amplitúdója az $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ komplex hullámnak)

P(1)

$$f(t) := \chi_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| \le a \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$



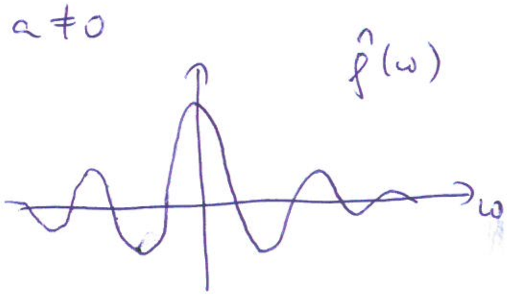
egységimpulzus

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{\cos\omega a + i\sin\omega a - \cos\omega a + i\sin\omega a}{i\omega} =$$

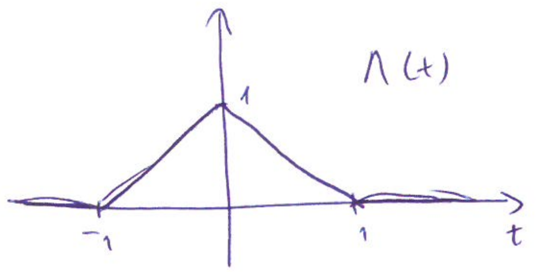
$$= 2\,\frac{\sin(\omega a)}{\omega}, \quad \text{ha } a \neq 0$$

és $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2a$



$\hat{f}(\omega)$ folytonos, de nem integrálható!

(2) Háromszög-jel:
$$\Lambda(t) := \begin{cases} 1-|t|, & \text{ha } |t| \le 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



$$\hat{\Lambda}(\omega) = \mathcal{F}\Lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(t) e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} (1-t) e^{-i\omega t}\,dt$$

$$\underset{\substack{p \\ \text{parc. int.}}}{=} \left[(1+t)\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\,dt + \left[(1-t)\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\,dt \ominus$$

$u = 1+t \to u' = 1$ | $u = 1-t \to u' = -1$

$v' = e^{-i\omega t} \to v = \dfrac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}$ | $v' = e^{-i\omega t} \to v = \dfrac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}$

$$\ominus \underbrace{\left[\frac{1}{-i\omega} - 0\right]}_{\cancel{\frac{i}{\omega}}} + \underbrace{\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-(i\omega)^2}\right]_{t=-1}^{0}}_{\frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2}} + \underbrace{\left[\frac{1}{i\omega} - 0\right]}_{\cancel{-\frac{i}{\omega}}} - \underbrace{\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-(i\omega)^2}\right]_{t=0}^{1}}_{\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}} =$$

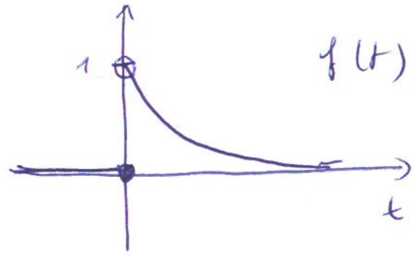
$$= \cancel{\frac{1}{\omega^2}}\, \frac{1 - e^{i\omega} - e^{-i\omega} + 1}{\omega^2} = \frac{2 - \cos\omega - i\sin\omega - \cos\omega + i\sin\omega}{\omega^2} =$$

$$= \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2} = \frac{2\left(\cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2} - \cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$$

3

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } t \le 0 \\ e^{-at} & \text{, ha } t > 0 \end{cases}$$



$a > 0$

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\omega)t}\, dt = \lim_{\Omega\to\infty} \int_{0}^{\Omega} e^{(-a-i\omega)t}\, dt =$$

$$= \lim_{\Omega\to\infty} \underbrace{\left[\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega} \right]_0^{\Omega}}_{\frac{1}{-a-i\omega}\left(e^{(-a-i\omega)\Omega} - 1\right)} = -\frac{1}{a+i\omega} \lim_{\Omega\to\infty} \Big(\underbrace{e^{-a\Omega}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{e^{-i\omega\Omega}}_{\uparrow\, \text{korlátos}} - 1 \Big) =$$

$$= \frac{1}{a+i\omega} \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ A Fourier-transzformált általában komplex

Megj. 1 és 2 példában azért kaptunk $\hat{f}$ valósat, mert f páros függvény volt.

A Fourier-transzformált (FT) alaptulajdonságai:

TÉTEL Ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, akkor az $\hat{f}$ Fourier-transzformált egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en és $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Biz.:

$$\left| \hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{\left[e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t} \right]}_{e^{-i\omega t}\left[e^{-iht}-1\right]} dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{=1} \cdot |e^{-iht}-1| \, dt$$

Ha $h \to 0$, akkor $e^{-iht} \to 1 \Rightarrow$ ha h elég kicsi, akkor $|e^{-iht}-1| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left| \hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \varepsilon \, dt \leq \varepsilon \|f\|_{L^1}$$

vagyis ha $h \to 0$, akkor $\hat{f}(\omega+h) \rightrightarrows \hat{f}(\omega)$ ✓

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt}_{\xrightarrow{\omega \to \infty} 0} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt}_{\xrightarrow{\omega \to \infty} 0}$$

(Riemann–Lebesgue lemma)

!

⑧

egy. folytonos

Megj: $C_0(\mathbb{R})$: $\pm\infty$-ben 0-hoz tartó függvények

$\|f\|_C := \sup |f(t)|$ normával Banach-tér.

$\Downarrow$

a FT $L^1(\mathbb{R})$-et $C_0(\mathbb{R})$-be képezi

TÉTEL

① A FT lineáris, azaz, ha $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor

$$\widehat{(\lambda f + \mu g)} \equiv \mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \hat{f} + \mu \hat{g}$$

$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$

② Skálázási tulajdonság

$a > 0$

$$\widehat{f(at)}(\omega) \equiv \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

③ Eltolási tulajdonság

$h > 0$

$$\widehat{f(t-h)}(\omega) = e^{-i\omega h} \hat{f}(\omega)$$

④ Frekvenciaeltolási tulajdonság

$$\widehat{e^{iat} f(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$$

⑤ cosinusos moduláció

$$\widehat{(\cos at) f(t)}(\omega) = \frac{1}{2} \hat{f}(\omega - a) + \frac{1}{2} \hat{f}(\omega + a)$$

(9) Biz (1) triviális

(2)

$$\widehat{f(at)}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}}\,du=$$

$u:=at \to du=a\,dt$

$t=\frac{u}{a}$

$$=\frac{1}{|a|}\hat f\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(3)

$$\widehat{f(t-h)}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-h)e^{-i\omega t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+h)}\,du=$$

$u:=t-h \Rightarrow du=dt$

$\hookrightarrow t=u+h$

$$=e^{-i\omega h}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du=e^{-i\omega h}\hat f(\omega)$$

(4)

$$\widehat{e^{iat}f(t)}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-a)t}\,dt=\hat f(\omega-a)$$

(5) Mivel $\cos at=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$, (4)-ből következik.

$\circ$!

<u>Áll:</u> Ha f páros (páratlan), akkor $\hat f$ páros (páratlan).

<u>Biz.</u> $\hat f(\omega)=\mathcal{F}f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$

$$\hookrightarrow \hat f(-\omega)=\mathcal{F}f(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt \underset{\uparrow}{=} -\int_{\infty}^{-\infty} f(-t)e^{-i\omega t}\,dt \ominus$$

$t \leftrightarrow -t$ csere $\Rightarrow dt \leftrightarrow -dt$

$-\infty<t<\infty \Leftrightarrow \infty>-t>-\infty$

$$\ominus \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)e^{-i\omega t}\,dt=\begin{cases}\hat f(\omega), & \text{ha } f(-t)=f(t)\\ -\hat f(\omega), & \text{ha } f(-t)=-f(t)\end{cases}$$

$\circ$!

(10)

<u>Megj.</u> Ha f valós $\Rightarrow$ $\mathcal{F}f(-\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt =$

$$= \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt} = \overline{\mathcal{F}f(\omega)}$$

A konvolúció

<u>Def.</u> $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ függvények <u>konvolúciójának</u> az

$$(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \quad \text{függvényt értjük.}$$

<u>Megj.</u> A definíció korrekt, mert

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \right| dt \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)\, g(x)|\, dx \right) dt =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t-x)|\, dt\, dx \underset{\uparrow}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L_1} \cdot \|g\|_{L_1}$$

Fubini-tétel — Lebesgue-mérték eltolás-invariáns

↳ azaz $f(t-x)\, g(x)$ mint kétváltozós függvény integrálható $\mathbb{R}^2$-en

$\Rightarrow$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx$ m.m. létezik és

$$\|f * g\|_{L^1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(t)|\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \right| dt \underset{\uparrow}{\leq} \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

mint az előbb.

$\Rightarrow$ $f * g \in L^1(\mathbb{R})$

(11)

TÉTEL A konvolúció $L^1(\mathbb{R})$-ben kommutatív, asszociatív és disztributív művelet, azaz $L^1(\mathbb{R})$ a $*$ szorzással Banach-algebra.

Biz $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy \underset{z := x-y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(z)\, g(x-z)\, dz = (g*f)(x)$$

$f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$

$$((f*g)*h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-y)\, h(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y-\cancel{z})\, g(z)\, h(y)\, d\cancel{z}\, dy$$

$$\underset{\substack{z = t-y \\ + \text{ Fubini}}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \int_{\mathbb{R}} g(t-y)\, h(y)\, dy\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, (g*h)(t)\, dt$$

$$= (f*(g*h))(x)$$

disztributivitás hf.: o!

Megj ① belátható, az u.n. Young-egyenlőtlenség:

$1 \le p, q, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

$f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $f*g \in L^r(\mathbb{R})$ és

$$\|f*g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

② Legyen f és g folytonos, g kompakt tartójú

(azaz $g = 0$ egy kompakt halmazon kívül)

Ha f vagy $g \in C^\infty$ (azaz akárhányszor folytonosan diff.ható $\equiv$ sima)

$\Longrightarrow$ $f * g \in C^\infty$ (ez a konvolúció simító tulajdonsága)

TÉTEL (A Fourier-trafó és a konvolúció kapcsolata)

Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, akkor $\boxed{\widehat{(f*g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}}$, azaz

integrálható függvények konvolúciójának FT-ja a függvények FT-jának szorzata.

Biz.

$$\widehat{(f*g)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, g(x)\, dx \right) dt =$$

$$\underset{\text{Fubini-tétel}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t-x)\, dt \right) dx \underset{\substack{u := t-x \ \rightsquigarrow\ t = u+x \\ du = dt}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(u+x)} f(u)\, du \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-i\omega x} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u)\, du \right)}_{\hat{f}(\omega)} dx = \hat{f}(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-i\omega x}\, dx}_{\hat{g}(\omega)} =$$

$$= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) \qquad !$$

A FT kapcsolata a deriválással és az integrálással

TÉTEL: Legyen f $\forall$ véges zárt intervallumon abszolút folytonos.

Tfh $f, f' \in L^1$ és $\underbrace{f(x), f'(x) \to 0, \text{ ha } |x| \to \infty}_{\text{végtelenben eltűnő függvények}}$.

$$\equiv f, f' \in C_0$$

Ekkor

$$\boxed{\widehat{f'}(\omega) = \mathcal{F} f'(\omega) = (i\omega) \cdot \hat{f}(\omega)}$$

Biz. f abszolút folytonos $\Rightarrow$ m.m. diffható

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parc. int}}}{=} \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-i\omega) e^{-i\omega t} dt =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} f(t) = 0}}{=} 0 + (i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega) \hat{f}(\omega)$$

$\blacksquare$!

Megj. Teljes indukcióval általánosítható:

Ha $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ $k = 0, 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{f^{(k)}}(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega), \quad k = 0, 1, \dots, n}$$

Megj. Feltehetjük, hogy f' integrálható, így a Riemann-Lebesgue lemma miatt:

$$\hat{f'}(\omega) \to 0, \text{ ha } |\omega| \to \infty$$

$\Rightarrow$ $\lim_{t \to \pm\infty} |\omega| \hat{f}(\omega) = 0$, sőt, ha f k-szor diff.ható és

$$f^{(k)} \in L^1 \Rightarrow \lim_{t \to \pm\infty} |\omega|^k \hat{f}(\omega) = 0.$$

Vagyis minél simább (többször deriválható) f, az $\hat{f}$ FT annál gyorsabban tart 0-hoz. !!!

Eml. paraméteres integrálok deriválása:

Tfh $h(t,\omega)$ integrálható t-szerint $\mathbb{R}$-en, ha $\omega \in [a,b]$ (paraméter),

$\exists \frac{\partial h}{\partial \omega}$ $\mathbb{R} \times [a,b]$-n és van integrálható majoránsa, azaz $\exists g \in L^1(\mathbb{R})$, melyre $\left|\frac{\partial h}{\partial \omega}(t,\omega)\right| \leq g(t)$ $\forall \omega \in [a,b]$.

Ekkor

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\omega)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial \omega}(t,\omega)\, dt.$$

(„Bederiválhatunk az integrál mögé.")

Alkalmazzuk ezt a FT-ra:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\, e^{-i\omega t}}_{h(t,\omega)}\, dt \quad \to \text{ diff-ható } \omega\text{-szerint és}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \omega} h(t,\omega)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \omega} f(t)\, e^{-i\omega t}\right| = \left|-it\, f(t)\, e^{-i\omega t}\right| = |t f(t)|$$

↳ ~~Ha~~ ha $t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, akkor teljesül az elégséges feltétel.

Később látjuk, hogy fennáll az ún. inverziós formula:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega .$$

Az előbbiekkel hasonlóan, ha $\omega \hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$, akkor

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, (i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega .$$

Összefoglalva

TÉTEL Ha $f(t),\ t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, akkor $\hat{f}$ diff-ható és

$$t f(t) \text{ FT-ja } = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) .$$

Ha $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$t^n f(t) \text{ FT-ja } = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)$$

$$\boxed{\widehat{\left(t^n f(t)\right)}(\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega)}$$

A Schwartz-tér és az inverziós formula

Láttuk, hogy $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, azaz a Fourier-transzformáció az integrálható függvényeket a $\pm\infty$-ben eltűnő folytonos függvények terébe viszi.
Belátható, hogy ez a transzformáció injektív, de nem szürjektív.

A Schwartz-tér L^1-nek azon altere, melyet a FT invertálisan képez.

Def. A Schwartz-tér (gyorsan csökkenő sima függvények tere) $\mathbb{R}$-en, azon sima (C^∞) függvényekből áll, melyeknek $\forall$ deriváltja is C^∞ és gyorsan csökkennek 0-hoz a $\pm\infty$-ben, azaz gyorsabban, mint $\frac{1}{|x|}$ $\forall$ hatványa:

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; f^{(k)} \in C^\infty \; \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{|x|\to\infty} x^\beta f^{(\alpha)}(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Megj. A legtöbb könyvben megtalálható $S(\mathbb{R}^n)$ értelmezése, az ún. multiindexek segítségével. Mi ezzel most nem foglalkozunk.

(17)

Megj. (1) $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}) \quad \forall\, p \in [1, \infty)$

(2) $\boxed{f \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \hat{S}(\mathbb{R})}$

nem bizonyítjuk.

Lemma (Gyenge Parseval-formula)

$$f, g \in S(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{g}(t)\, dt$$

Biz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt}\, dx \right) g(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t) e^{-ixt}\, dx\, dt \underset{\text{Fubini-tétel}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t) e^{-ixt}\, dt\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ixt}\, dt \right)}_{\hat{g}(x)} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) f(x)\, dx$$

A Fubini-tétel alkalmazható, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) g(t) e^{-ixt}|\, dx \right) dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt \;.$$

$\circ\,!$

Példa Számoljuk ki $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ FT-ját!

Tudjuk (Kalkulus 2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\, du = \sqrt{2\pi}$$

$$u := \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}\, du$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\cancel{x}) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx \underset{\uparrow}{\ominus}$$

parc. int:

$$u'(x) := -ix e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow u(x) = i e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$v(x) = e^{-i\omega x} \Rightarrow v'(x) = -i\omega e^{-i\omega x}$$

$$\ominus \underbrace{\left[i e^{-i\omega x} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x} dx = -\omega \hat{f}(\omega)$$

$\to 0$

vagyis $\hat{f}(\omega)$ kielégíti az $y'(\omega) = -\omega y(\omega)$ diffegyenletet.

Melynek megoldása: $\frac{dy}{d\omega} = -\omega y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\omega d\omega \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \omega d\omega$

$$\ln y = -\frac{\omega^2}{2} + \ln C$$

$$\Rightarrow y = C e^{-\frac{\omega^2}{2}}, \quad y(0) = C$$

vagyis $\hat{f}(\omega) = \hat{f}(0) e^{-\frac{\omega^2}{2}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

(19)

Vagyis, ha $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, akkor $\hat{f}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$. !

$\Rightarrow$ <u>Gauss-görbe FT-ja Gauss-görbe</u>

<u>Megj</u>: $2p$-periodikus függvények komplex Fourier-sorát láttuk:

$$f \sim \Phi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,e^{in\frac{\pi}{p}x}, \text{ ahol}$$

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\,e^{-in\frac{\pi}{p}t}\,dt.$$

Hasonlót várunk FT esetén is:

TÉTEL (inverziós formula)

Ha $g\in S(\mathbb{R})$, akkor $g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega$.

<u>Biz</u>

<u>eml</u>: skálázási formula: $\widehat{f(at)}(\omega)=\frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

legyen $\varphi\in S$, $\lambda>0$ $\Rightarrow$ $f(x):=\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

$$\hookrightarrow \hat{f}(\omega)=\widehat{\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)}(\omega)=\lambda\,\hat{\varphi}(\lambda\omega)$$

Alkalmazzuk a LEMMÁt (gyenge Parseval)

$$\int_{\mathbb{R}} g(\omega)\hat{f}(\omega)\,d\omega=\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(\omega)\,\lambda\,\hat{\varphi}(\lambda\omega)\,d\omega}=\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(x)f(x)\,dx=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(x)\,\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx$$

mivel

$$\underset{\mathbb{R}}{\int} g(\omega)\lambda\hat{\varphi}(\lambda\omega)\,d\omega \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)\lambda \hat{f}(u)\,\frac{du}{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)\hat{f}(u)\,du$$

$$u := \lambda\omega \Rightarrow d\omega = \frac{du}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{u}{\lambda}$$

Vagyis világos:

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{u}{\lambda}\right)\hat{f}(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)dx \qquad (*)$$

Ha $\lambda \to \infty \Rightarrow g\left(\frac{u}{\lambda}\right) \to g(0)$

$$\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \to \varphi(0)$$

$\hat{\varphi}, \hat{g} \in S \Rightarrow (*)$-ban vehető $\lambda \to \infty$ a Dominált Konv. Tétel miatt

$\hookrightarrow \quad g(0)\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(u)\,du = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\,dx \qquad (**)$

legyen $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R}) \xRightarrow{\text{Példa}} \hat{\varphi}(u) = \sqrt{2\pi}\, e^{-u^2/2}$

$\hookrightarrow \varphi(0) = 1$ és $\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(u)\,du = \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi} = 2\pi$

Vagyis $(**)$: $\quad 2\pi g(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\,dx \Rightarrow \boxed{g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\,dx.}$

ez éppen a tétel $x=0$-ban

Az általános esetet az eltolási tételből kapható.

!

21

Megj.

① Ha $f \in S(\mathbb{R})$ helyett csak $f \in L^1(\mathbb{R})$-et teszünk fel, akkor az inverziós formula alakja:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

vagyis ahol f folytonos, ott működik.

② Szokásos szimmetrikusan bevezetni az FT-t:

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \equiv (\mathcal{F} f)(\omega)$$

akkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \equiv (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f \\ \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} f) = f \end{array}}$$

③ Belátható (HF)

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}[f(x)]) = f(-x)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-1}[f(x)]) = f(-x)$$

④ Plancherel-formulák

$$f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}^{-1} f(t)|^2\, dt$$