601/ Végig $f(x+2\pi)=f(x)$

Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájáról eddig bizonyított

TÉTEL: Ha $f'_+(x)$ és $f'_-(x)$ féloldali deriváltak léteznek (végesek) akkor a f 2π-periodikus függvény Fourier-sora konvergens x-ben és az összege:

$$\Phi(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

spec. ha f folytonos x-ben $\Rightarrow$ $\Phi(x)=f(x)$

Sok egyéb kritérium ismert:

Pl:

TÉTEL (Dini-féle kritérium)

Ha valamely x-re $\dfrac{\Phi_x(t)}{t}$ függvény a $t=0$ pont egy környezetében abszolút integrálható, akkor

$$S_n(x)\longrightarrow f(x) \qquad (n\to\infty)$$

eml. $\Phi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$

Biz. Láttuk:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad =$$

$$\overset{\bigcirc}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\Phi_x(t)}{t}\,\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

- $\dfrac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}$ korlátos $[0,\pi]$-ben $\quad \left(\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}=1\right)$

  $\Downarrow$ + folytonos

  integrálható

- $\dfrac{\Phi_x(t)}{t}$ integrálható a feltétel miatt

  $\Downarrow$

  szorzatuk integrálható. $\quad g(t) := \dfrac{\Phi_x(t)}{t}\,\dfrac{t}{2\sin\frac{1}{2}t}$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Riemann-lemma)

!

Speciális esetekben könnyebben ellenőrizhető feltételek kaphatók.

Def: Az f függvény az x helyen eleget tesz a α-rendű (lokális) Lipschitz-feltételnek (α-rendben lokálisan Lipschitzes), ha valamely $\alpha\in(0,1]$-hez $\exists\ \delta>0,\ M>0$, hogy $\forall\ h\in\mathbb{R}$ $|h|\le\delta$-ra

$$|f(x+h)-f(x)| \le M\cdot h^\alpha$$

Megjegyzések

(1) Ha f x-ben Lipschitz $\Rightarrow$ folytonos x-ben

(Ha $h \to 0$, akkor $|f(x+h)-f(x)| \leq M h^{\alpha} \to 0$, vagyis

$$f(x+h) \to f(x) \quad . \,)$$

(2.) Ha f x-ben α-rendű Lipschitz, akkor $0<\beta \leq \alpha$-ra β-rendben is az.

(Ha $0<|h|<1 \Rightarrow |h|^{\alpha} < |h|^{\beta}$)

(3.) Ha f diffható x-ben, akkor ott $\alpha=1$ -Lipschitz.

(ha $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} q$, akkor elég kicsi h-ra:

$$|f(x+h)-f(x)| \leq h(|q|+1) \quad \rightsquigarrow \text{ 1-Lip })$$.

$\Downarrow$

A Lipschitz-tulajdonság erősebb, mint a folytonosság, de gyengébb, mint a deriválhatóság.

004)

TÉTEL (Lipschitz-kritérium)

Ha az f integrálható függvény x-ben α-rendű Lipschitz-es, akkor a Fourier-sora x-ben a függvényértékhez konvergál:

$$S_n(x) \to f(x) \quad .$$

Biz. Ha ~~f-ben~~ f-re x-ben teljesül a Lipschitz-feltétel, akkor a Dini is:

$$\int_0^\delta \frac{|\Phi_x(t)|}{t}\,dt = \int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt \le$$

$$\le \int_0^\delta \frac{|f(x+t)-f(x)|}{t}\,dt + \int_0^\delta \frac{|f(x-t)-f(x)|}{t}\,dt \le$$

$$\le \int_0^\delta \frac{M|t|^\alpha}{t}\,dt + \int_0^\delta \frac{M|t|^\alpha}{t}\,dt = 2M \underbrace{\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,dt}_{\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_0^\delta} < \infty$$

$$\Downarrow$$

Vagyis teljesül a Dini feltétel

Megj: A tétel működik féloldalas változatban is:

Ha az f integrálható függvénynek léteznek a féloldali határértékei és mindkét oldalon eleget tesznek egy Lipschitz-feltételnek, azaz

$$|f(x+h)-f(x+0)| \leq M h^{\alpha}$$
$$|f(x-h)-f(x-0)| \leq M h^{\beta} \qquad 0<h<\delta$$

akkor a Fourier-sor x-ben a féloldali határértékek átlagához konvergál:

$$S_n(x) \to \Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

A pontonkénti konvergencia nem pontosan(?) az egyik legáltalánosabb tétel a Dirichlet-Jordan-tétel

Dirichlet 1829.: véges sok maximummal és minimummal rendelkező függvényekre (1 perióduson belül)

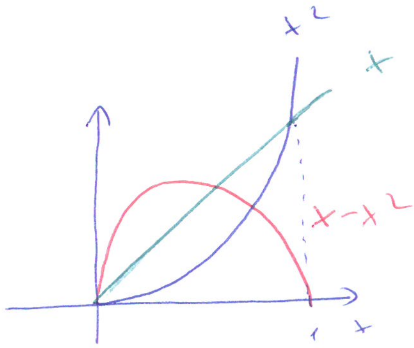
Jordan: 1881.: korlátos változású függvényekre.

Kitérő

- egyező értelemben monoton függvények összege monoton marad ugyanabban az értelemben

- két ellentétes értelemben monoton függvény összege (vagyis 2 monoton fv különbsége) általában nem monoton:

pl: $(0,1)$-en $\quad x - x^2 = x(1-x)$



Tfh $f_1(x)$ és $f_2(x)$ $[a,b]$-n monoton növőek

$$f(x) := f_1(x) - f_2(x)$$

Tekintsük $[a,b]$ egy felosztását: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f_1(x_k) - f_2(x_k) - f_1(x_{k-1}) + f_2(x_{k-1})| =$$

$$= |f_1(x_1) - f_2(x_1) - f_1(x_0) + f_2(x_0)| + \dots + |f_1(x_n) - f_2(x_n) - f_1(x_{n-1}) + f_2(x_{n-1})|$$

$$\le |f_1(x_1) - f_1(x_0)| + |f_2(x_0) - f_2(x_1)| + \dots + |f_1(x_n) - f_1(x_{n-1})| + |f_2(x_{n-1}) - f_2(x_n)|$$

$$\underset{f_1, f_2 \nearrow}{=} f_1(x_1) - f_1(x_0) + f_2(x_1) - f_2(x_0) + \dots + f_1(x_n) - f_1(x_{n-1}) + f_2(x_n) - f_2(x_{n-1})$$

$$= f_1(b) - f_1(a) + f_2(b) - f_2(a) \qquad \text{(teleszkóp)}$$

607/

$\Rightarrow$ f változásai a felosztásból függetlenül korlátosak maradnak

<u>Def:</u> Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>korlátos változású</u>, ha

$$t=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

az osztópontok számától és elosztásától független korlát alatt marad. $(x_0=a<x_1<\dots<x_n=b)$

$$\boxed{T(a,b)=\sup_{\text{felosztásokra}} t}$$

f függvény $[a,b]$-n vett teljes változása (totális variációja)

<u>Megj:</u> Ha f korlátos változású $[a,b]$-n és $a<c<b$

$\Rightarrow$ $T(a,b)=T(a,c)+T(c,b)$

<u>Láttuk:</u> monoton növő függvények, illetve ezek különbsége korlátos változású

$\Downarrow$

A megfordítás is igaz!

<u>TÉTEL</u> (Jordan-tétel)

Minden korlátos változású függvény előáll két monoton növő függvény különbségeként.

<u>Biz</u> Tfh f korlátos változású $[a,b]$-n negyek teljes variációja:

$$T(x) := T(a,x)$$

Ha $\xi > x$ $\rightsquigarrow$ $T(\xi)-T(x) = T(x,\xi) \geq |f(\xi)-f(x)|$

$[x,\xi]$-n a teljes változás nem lehet kisebb, mint az a változás, ahol csak kelső osztópont

$\Rightarrow$ $T(\xi)-T(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ $T(x)$ monoton növő

$f \uparrow$ $\rightsquigarrow$ $T(\xi)-T(x) \geq f(\xi)-f(x)$

$$\Updownarrow$$

$$T(\xi)-f(\xi) \geq T(x)-f(x)$$

$\Rightarrow$ $T(x)-f(x)$ szintén monoton növő

$f(x) = T(x) - (T(x)-f(x))$ egy jó felbontás

605/

Megj:
$$T(\xi)-T(x) \geq -[f(\xi)-f(x)] \quad \text{-ből ez}$$

$$\Downarrow$$

$$T(\xi)+f(\xi) \geq T(x)+f(x)$$

$\hookrightarrow$ $T(x)+f(x)$ is monoton növő

$$\Rightarrow f(x) = \frac{T(x)+f(x)}{2} - \frac{T(x)-f(x)}{2}$$ felbontás is használható

!

Megj: Kalkulus 1-ben bizonyítottuk:

monoton függvény legfeljebb megszámlálhatóan végtelen helyen szakadhat és csak megszüntethető szakadásuk, vagy véges ugrásuk lehet

$$\Downarrow$$

ez öröklődik a korlátos változású függvényekre

Visszatérés a Fourier-sorokra:

TÉTEL (Dirichlet-Jordan tétel)

Tfh f 2π-periodikus, integrálható korlátos változású $[a,b]$-n.

Ekkor

1) $\forall x \in (a,b)$-re $\quad S_n(x) \to \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad (n\to\infty)$

2) Ha f (a,b)-ben folytonos is, akkor $\forall [a+\delta, b-\delta]$-n

$$S_n \rightrightarrows f$$

!

Biz: pl: Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

Fourier-sorok egyenletes konvergenciája

Tfh $f \in C^2[-\pi,\pi]$ + periodikus kiterjesztés folytonos módon

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parc. int}}}{=} \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[f(x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx =$$

parc. int

$u = f \to u' = f'$

$v' = \cos nx \to v = \frac{\sin nx}{n}$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{n\pi}\underbrace{\left[f'(x)\,\frac{\sin\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\,\frac{\sin\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)}{n}\,dx =$$

parc. int.

$u = f'(x) \to u' = f''(x)$

$v' = \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) \to v = \frac{\sin\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)}{n}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx-\pi)\,dx$$

$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

mert

$f \in C^2$ + periodikus kiterjesztés miatt $f'(\pi) = f'(-\pi)$

$\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-n\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

6.11/

Vagyis:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx - \pi)\, dx}$$

hasonlóan:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \sin(nx - \pi)\, dx}$$

Megj. teljes indukcióval bizonyítható:

$$f \in C^k[-\pi, \pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \cos\left(nx - k \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \sin\left(nx - k \cdot \frac{\pi}{2}\right) dx$$

TÉTEL: Ha $f \in C^2$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, akkor

f Fourier-sora egyenletesen konvergens és

$$S_n \rightrightarrows \Phi(x) = f(x)$$

612/

Biz

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| \cdot |\cos(nx-\pi)|\, dx \leq \frac{1}{\pi n^2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx}_{\pi \cdot C \,=\, \text{konst.}} = \frac{C}{n^2}$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| \cdot |\sin(nx-\pi)|\, dx \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx = \frac{C}{n^2}$$

$$\hookrightarrow |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n||\cos nx| + |b_n| \cdot |\sin nx| \leq$$

$$\leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{2C}{n^2}$$

de $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konv $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ a Fourier-sor egyenletesen konvergál!

Megj $f \in C^k \Rightarrow |a_n| \leq \frac{C_k}{n^k}$

$|b_n| \leq \frac{C_k}{n^k}$ valamely $C_k > 0$ konstanssal.

613)

Megj ismertek enyhébb feltételek is:

1. TÉTEL: Ha f 2π-periodikus, abszolút folytonos és f' Riemann-integrálható

$\Rightarrow$ f Fourier-sora egyenletesen konvergál f-hez.

2. TÉTEL (Dini-feltételből)

Ha $E \subset [-\pi, \pi]$-n f integrálható fv. korlátos és $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} \, dz < \varepsilon \qquad \forall x \in E,$$

akkor f Fourier-sora egyenletesen konvergál f-hez E-n

!

Mikor lehet tagonként integrálni egy Fourier-sort?

1) Ha egyenletesen konvergens, akkor igen (általános tétel)

2) $\exists$ enyhébb feltétel is:

614)

TÉTEL Tfh $f(x+2\pi)=f(x)$ integrálható függvény, melynek a Fourier-sora

$$\Phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Ekkor:

a) a szinusz-együtthatókra teljesül, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$ numerikus sor konvergens.

b) Az $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ függvény Fourier-sora tagonkénti integrálással kapható, azaz:

$$\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right)$$

és ez a sor mindenütt konvergens.

c) Ha $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<\infty \Rightarrow$ a sor egyenletesen is konvergál.

Biz. ~~$\forall$ [a,b] intervallumra~~: (vázlat)

F f-nek integrálfüggvénye $\Rightarrow$ F korlátos változású és így integrálható

$F'(t)=f(t)$ majdnem mindenütt (Köv. 1)

$$G(x):=F(x)-\frac{a_0x}{2}=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$$

615)

- G integrálható
- G 2π-periodikus:

$$G(x+2\pi)-G(x)=\int_0^{x+2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\int_0^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\underbrace{\int_0^{2\pi}f(t)\,dt}_{\pi a_0}-2\pi\cdot\frac{a_0}{2}=0$$

Számoljuk ki G Fourier-sorát!

$$\underline{\underline{\alpha_n}}:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(t)\cos nt\,dt\underset{\text{parc. int}}{=}\frac{1}{\pi}\underbrace{\left[G(t)\frac{\sin nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\frac{\sin nt}{n}dt$$

$$u=G(t)\rightsquigarrow u'=G'(t)=f(t)-\frac{a_0}{2}$$

$$v'=\cos nt\rightsquigarrow v=\frac{\sin nt}{n}$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt+\frac{a_0}{2\pi n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt}_{\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0}=\underline{\underline{-\frac{b_n}{n}}}$$

$n>0$

$$\beta_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(t)\sin nt\,dt\underset{\text{parc. int}}{=}\frac{1}{\pi}\underbrace{\left[-G(t)\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\frac{\cos nt}{n}dt$$

$$u=G(t)\rightsquigarrow u'=f(t)-\frac{a_0}{2}$$

$$v'=\sin nt\rightsquigarrow v=-\frac{\cos nt}{n}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt-\frac{a_0}{2\pi n}\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt}^{0}=\underline{\underline{\frac{a_n}{n}}}$$

6/6/

vagyis G Fourier-együtthatói:

$$\alpha_n = -\frac{b_n}{n} \qquad n>0$$

$$\beta_n = \frac{a_n}{n}$$

↳ Fourier-sora:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \right)$$

Dirichlet-tétel tétel ⇒ a sor mindenütt konvergens és az összege G

$$G(x) = -\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \right)$$

$$G(0) = -\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \int_0^0 \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

a) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ nyilván konvergens ✓

b) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = G(x) + \frac{a_0 x}{2} =$

$$= \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right)$$

✓

c) Mivel $$0 \le \left(A - \frac{1}{n}\right)^2 = A^2 - \frac{2A}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|b_n|}{n} + \frac{|a_n|}{n}\right) \le \cancel{\tfrac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n^2+b_n^2}{2} + \frac{1}{n^2}\right) \le \infty$$

$$\cancel{+\infty} \qquad \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx} \qquad\qquad \underset{\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}{\wedge|}$$

$\Rightarrow$ G Fourier-sorát $\sum_n \left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right)$ ~~majoráns sor~~ konvergens sor majorálja $\overset{W}{\Rightarrow}$ egyenletes a konvergencia

Megj. Az eddigiek általánosíthatók tetszőleges $2p$ periodusú függvényre: $$f(x+2p) = f(x)$$

Fourier-sora:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right), \text{ ahol}$$

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

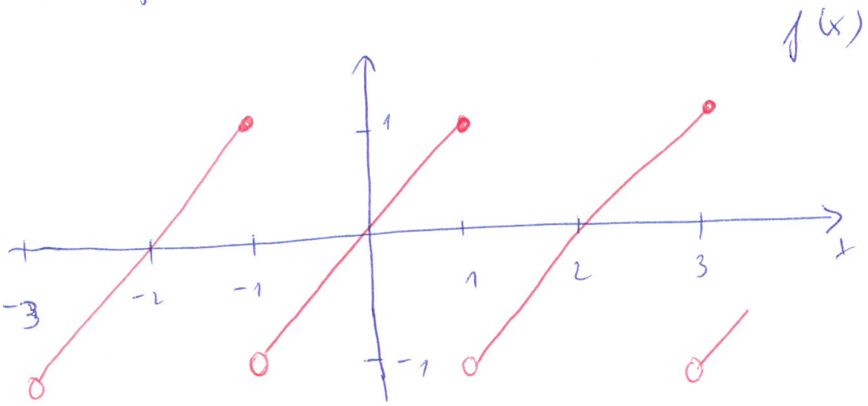
$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

618/

Példa.

$f(x) = x$, ha $x \in (-1,1]$ + 2-periodikus

kiterjesztés



$2p = 2 \Rightarrow p = 1$

páratlan fv $\Rightarrow a_n = 0 \quad n \geq 0$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}\,dx = \int_{-1}^{1} x\cdot\sin(n\pi x)\,dx \underset{\text{parc. int.}}{=}$$

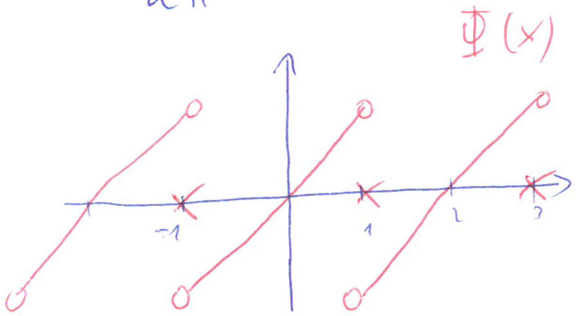
$u = x \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = \sin n\pi x \rightsquigarrow v = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}$

$$= \left[-x\,\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{-1}^{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx}_{\left[\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\right]_{-1}^{1} = 0} \ (=)$$

$$(=)\ -\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)$$



619/

Kitérő: $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ skalárszorzatos tér

↳ $\|\underline{v}\| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$ ⇝ V normált tér

↳ $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\| = \sqrt{\langle \underline{v}-\underline{w}, \underline{v}-\underline{w} \rangle}$ ⇝ V metrikus tér

Def. A $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormált rendszert ($\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i,j$) teljesnek nevezzük, ha nincs rájuk merőleges nem nulla elem, azaz, ha $g \in V$-re $\langle \varphi_n, g \rangle = 0$ $\forall n$-re, akkor $g = 0$.

Láttuk: ha $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer (bázis), akkor

$\forall f \in V$ $\quad f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, ahol $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$.

TÉTEL: Legyen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy teljes ortonormált rendszer, melyre

$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

Ekkor

$$\boxed{\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2}$$

Parseval-formula

620/

Biz. tfh valamely $g \in V$-re $g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$

↳ $\forall k \in \mathbb{N}$: $\langle f-g, \varphi_k \rangle = \langle f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \varphi_k \rangle =$

$$= \langle f, \varphi_k \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{\delta_{nk}} =$$

$$= \langle f, \varphi_k \rangle - c_k = 0$$

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes $\Rightarrow$ $f-g=0$, azaz $f=g$ ⇝ egyértelmű az előállítás

$$\|f\|^2 = \langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \rangle = \sum_{n,k=1}^{\infty} c_n c_k \underbrace{\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle}_{\delta_{n,k}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

! !

Belátható! (kell hozzá Lebesgue-mérték → L^2 terek)

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right)_{n \in \mathbb{N}}$

teljes ortonormált rendszert alkotnak az

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx \text{ skalárszorzattal}$$

ellátott függvénytéren.

Köv

Ha
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \|f\|^2 < \infty$$

és
$$f(x) \sim \Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

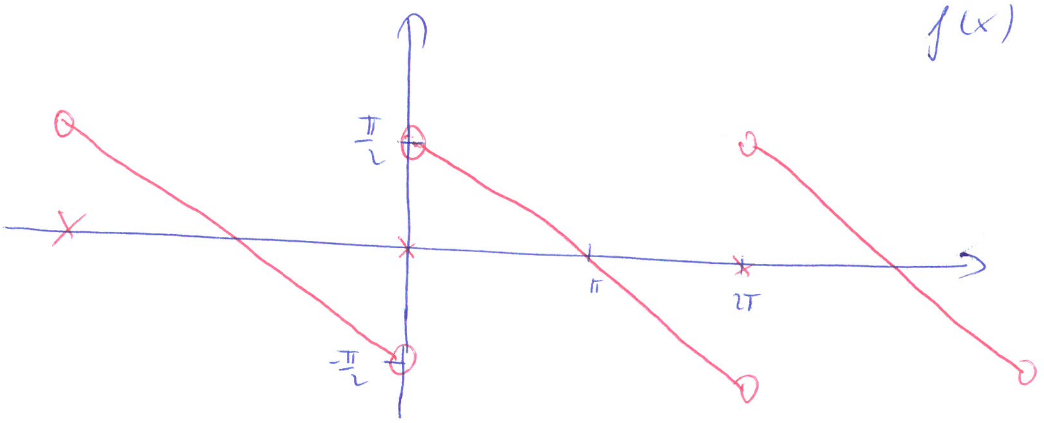
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right)}$$

Parseval-formula
Fourier-sorokra

Példa

Láttuk:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{ha } 0 < x \le \pi \\ \frac{-\pi - x}{2}, & \text{ha } -\pi \le x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$
+ periodikus kiterjesztés



$$f(x) \sim \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

622/

Parseval-formula

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = 2\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^3\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^3}{6} = \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Megj. A Parseval-formula általánosítható:

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer és $f = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varphi_n$$

$$\hookrightarrow \quad \langle f,g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k, \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varphi_n\right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_k\beta_n\underbrace{\langle\varphi_k,\varphi_n\rangle}_{=\delta_{kn}} = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n$$

$\Longrightarrow$ ha f és F négyzetesen integrálhatók és

~~$f \sim \frac{a_0}{2}\sum (a$~~ $\quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$g \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

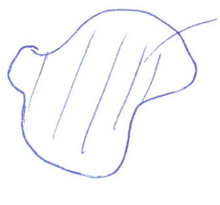
$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\,dx = \pi \left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \right]}$$

Egy nagyon szép és pontos alkalmazás:

Izoperimetrikus probléma

perimeter = kerület

Kérdés: Az adott kerületű, egyszerű (kettőspont nélküli), zárt rektifikálható síkgörbék közül, melyik által határolt idom területe a legnagyobb?



1839. J. Steiner: ha $\exists$ megoldás, akkor az csak a kör lehet, mert a körtől különböző görbék deformálhatók úgy, hogy a kerület ne változzon, de a terület nőjön.

(geometriai bizonyítás)

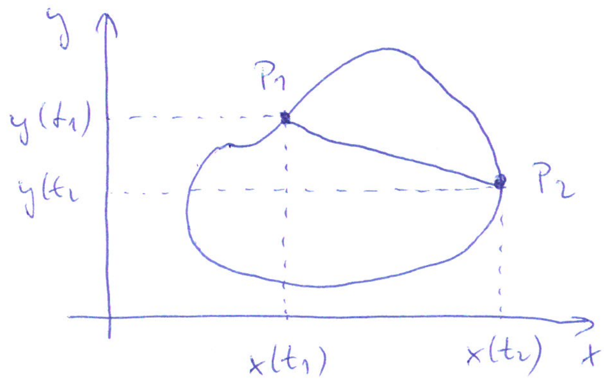
624)

Hurwitz megoldása 1902.

K: kerület fix

$\boxed{t := \frac{2\pi}{K} s}$ paraméter, ahol s valamely rögzített ponttól mért ívhossz (⇐ rektifikálható görbe)

$\Rightarrow \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad r(t) = (x(t), y(t)), \quad x(0) = x(2\pi), \; y(0) = y(2\pi)$



$$\left.\begin{array}{l}|x(t_2)-x(t_1)|\\ |y(t_2)-y(t_1)|\end{array}\right\} \le \underbrace{\overline{P_1P_2}}_{P_1, P_2 \text{ távolsága}} \le \underbrace{\widehat{P_1P_2}}_{P_1, P_2 \text{ ív hossza}} = |s_2 - s_1| = \frac{K}{2\pi}|t_2 - t_1|$$

$\Rightarrow$ $x(t), y(t)$ Lipschitz $\Rightarrow$ m.m. diffhatóak

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \dot{s}(t)^2 = \frac{K^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)\right)^2 = \int_0^{2\pi} \dot{s}(t)^2 \, dt = \frac{K^2}{4\pi^2} \cdot 2\pi = \frac{K^2}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ $\dot{x}(t)$ és $\dot{y}(t)$ négyzetesen integrálható!

625)

Fourier-sorfejtés

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$y(t) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(t) \cos nt \, dt \underset{\text{parc. int}}{=} \underbrace{[x(t)\cos nt]_0^{2\pi}}_{=0} + n \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt \, dt = \pi b_n \cdot n$$

0, mert $x(2\pi) = x(0)$)

$u = \cos nt \rightsquigarrow u' = -n \sin nt$

$v' = \dot{x}(t) \quad v = x(t)$

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(t) \sin nt \, dt \underset{\text{parc. int}}{=} \underbrace{[x(t)\sin nt]_0^{2\pi}}_{=0} - n \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, dt = -n\pi a_n$$

0, mert $x(2\pi) = x(0)$)

$u = \sin nt \quad u' = n \cos nt$

$v' = \dot{x}(t) \quad v = x(t)$

hasonlóan $\dot{y}$-ra

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nt - a_n \sin nt)$$

$$\dot{y}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(B_n \cos nt - A_n \sin nt)$$

626/

A konvergenciáról nem tudunk semmit, de a Parseval-formulához nem kell!

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\left((\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2\right)dt = \pi\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left(b_k^2+a_k^2+B_k^2+A_k^2\right) =$$

$$= \frac{K^2}{2\pi}$$

Zárt görbe által közrezárt terület:

$$T = \int_0^{2\pi} y(t)\,dx(t) = \int_0^{2\pi} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt$$

eml.:

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

$$F \sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)F(x)\,dx = \pi\left[\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_na_n+B_nb_n)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$T = \int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t)\,dt = \pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(A_nb_n-a_nB_n\right)$$

$$\Downarrow$$

$$K^2 - 4\pi T = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 (a_k^2 + b_k^2 + A_k^2 + B_k^2) - 2k (A_k b_k - a_k B_k) \right]$$

$$= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k a_k + B_k)^2 + (k b_k - A_k)^2 + (k^2 - 1)(A_k^2 + B_k^2) \right] \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{K^2 \geq 4\pi T}$$ izoperimetrikus egyenlőtlenség ($\forall$ görbére igaz)

$=$ pontosan akkor, ha

$$\left.\begin{array}{l} k a_k + B_k = 0 \\ k b_k - A_k = 0 \end{array}\right\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$A_k = 0$ és $B_k = 0$, ha $k = 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$ $A_1 = b_1$, $B_1 = -a_1$, $a_k = b_k = A_k = B_k = 0$, ha $k \geq 2$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \sim \dfrac{a_0}{2} - a_1 \cos t - b_1 \sin t \\ y(t) \sim \dfrac{A_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t \end{array}\right\}$$

$\Downarrow$ folytonosság miatt egyenlőség van

$\Downarrow$

$$\left(x(t)-\frac{a_0}{2}\right)^2+\left(y(t)-\frac{A_0}{2}\right)^2=\left[a_1\cos t+b_1\sin t\right]^2+\left[-b_1\cos t+a_1\sin t\right]^2=$$

$$=a_1^2+b_1^2-\text{konst}$$

$\Downarrow$

ez egy körnek az egyenlete!

Vagyis az azonos kerületű egyszerű zárt görbék közül a kör által körbezárt terület a legnagyobb és

$$T=\frac{K^2}{4\pi}$$