625

Egyéb összegzési eljárások – mese

Euler felvetése: nem célszerű a divergens sorokat száműzni az analízisből

$$\Downarrow$$

konzisztens elméletet kellene alkotni

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor szummábilis és a szummája A, ha az $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ részletösszegekre teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1+s_2+\dots+s_n}{n} = A.$$

Példa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1-\dots$ nem konvergens, de szummábilis, mert

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ ptlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ ps} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{s_1+s_2+\dots+s_n}{n} - \frac{1}{2} \right| \le \left| \frac{\frac{n+1}{2}}{n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n+1-n}{2n} \right| = \frac{1}{2n} \to 0 \quad \text{ha } n\to\infty$$

$\Rightarrow$ szummábilis és a szummája $= \frac{1}{2}$

megj.: már Leibniz is emellett érvelt:

$\left.\begin{array}{l} \text{páros részletösszegek} = 0 \\ \text{ptlan} \quad \text{-"-} \quad = 1 \end{array}\right\}$ $\rightsquigarrow$ mindkettő „ugyanannyiszor" fordul elő de ∞ tag után nem eldönthető párosságról vagy ptlanságról $\Rightarrow \frac{1}{2}$

6'30

<u>Elvárás:</u> ha egy sor konvergens, akkor a summája (amennyiben summálható) legyen egyenlő az összegével.

<u>TÉTEL:</u> Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens és az összege A, akkor a sor summálható és a summája szintén A.

<u>Biz.</u> Ha $s_n \to A$, akkor $\frac{s_1+\dots+s_n}{n} \to A$ (ld. Kalk 1). !

<u>Megj:</u> summálhatóság szükséges feltétele:

$$\sum_n a_n \text{ summálható} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

Summálhatóság és konvergencia pontos kapcsolata:

<u>TÉTEL</u> (Tauber-tétel)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha summálható és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n} = 0 .$$

<u>Biz.</u> $\sum_n a_n$ konv $\Rightarrow$ summálható és ha $\lim_{n\to\infty} s_n = A$, akkor

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+\dots+na_n = {} & a_1+a_2+\dots+a_n + \\ & \quad a_2+\dots+a_n + \\ & \quad \vdots \\ & \qquad\qquad +a_n = s_n+(s_n-s_1)+\dots+(s_n-s_{n-1}) = \\ = {} & ns_n-(s_1+\dots+s_n) \end{aligned}$$

631)

$\hookrightarrow$ $$\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n} = \underset{\downarrow \atop A}{S_n} - \underset{\downarrow \atop A}{\frac{S_1+\dots+S_n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ ✓

Tfh $\sum_n a_n$ summálható és a summája A

$$\frac{S_1+S_2+\dots+S_{n-1}}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{S_1+\dots+S_{n-1}}{n-1} \to 1\cdot A = A$$

de $$\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n} = \frac{S_n+(S_n-S_1)+\dots+(S_n-S_{n-1})}{n} =$$

$$= S_n - \frac{S_1+\dots+S_{n-1}}{n} \to 0 \quad \text{miatt}$$

$S_n \to A \Rightarrow$ konvergens

!!

Köv: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ summálható $+$ $na_n \to 0$ $\Rightarrow$ a sor konvergens

Biz. $na_n \to 0$ miatt $\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n} \to 0$ kivonható!

Megj.

$\cos nx \not\to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

mert, ha $\cos nx \to 0$, akkor

$\cos 2nx = 2\cos^2 nx - 1 \to -1$: $\lightning$

632/

- $\sin nx \not\to 0$ ha $x \neq k\pi$

mert, ha $\sin nx \to 0$, akkor

$$\cos nx \cdot \sin x = \sin(n+1)x - \sin(nx) \cdot \cos x \to 0$$

de $\cos nx \not\to 0 \Rightarrow \sin x = 0$
és $x = k\pi$.

<u>Köv</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ divergál $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\cos nx \not\to 0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ divergál, ha $x \neq k\pi$

<u>TÉTEL</u> (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ $\forall x \in \mathbb{R}$-re summálható és a

summája • $x = 2k\pi$ esetén 0 $(k \in \mathbb{Z})$

• $x \neq 2k\pi$ esetén $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ $\forall x \neq 2k\pi$ esetén summálható és

a summája $-1/2$

<u>Biz</u> ld: Laczkovich–T. Sós.

Summabilitás általánosítása: Ernesto Cesàro

emlékeztető: $1-2+3-4+5-6+\dots$

nem summálható, mert $\frac{a_n}{n}\to 0$ nem teljesül.

ugyanis: $s_1=1$, $s_2=-1$, $s_3=2$, $s_4=-2$, $s_5=3$, $s_6=-3, \dots$

$\Downarrow$

ezek számtani közepeinek sorozata

$$(t_n)=\left(1,0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{5},0,\dots,\frac{n}{2n-1},0,\dots\right)$$

(t_n) divergens sorozat

de ha (t_n) sorozat számtani közepeit vesszük $\Rightarrow$ konvergál $\frac{1}{4}$-hez

$\Downarrow$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$t_n := \frac{s_1+\dots+s_n}{n}$$

$$u_n := \frac{t_1+\dots+t_n}{n}$$

Def: Ha $u_n \to A$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ C_2-summálható és C_2 summája A.

63/7)

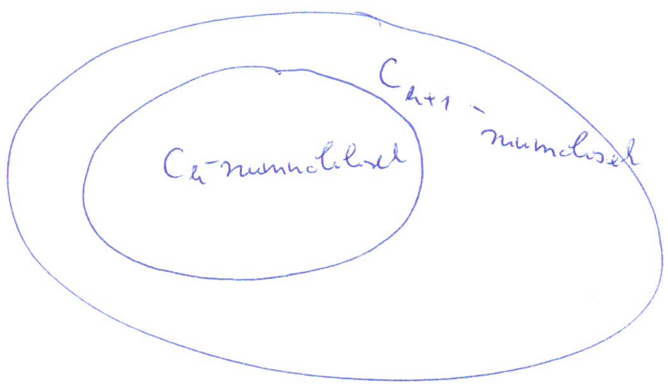
az eljárás folytatható: ha a k-dik lépésben kapott sorozat A-hoz tart, akkor $\sum_n a_n$ C_k-summálható és a C_k summája A.

Megj. 1) ha $\sum_k a_k$ C_k-summálható, akkor C_m summálható minden $m \geq k$-ra.

$\Downarrow$

egyre hatékonyabb összegzési eljárás

2)



nyomán bővebb!

Megj. Egyéb summációs eljárások is ismertek.

- de la Vallée Poussin-féle summáció
- Riesz-féle summáció
- Abel-féle summáció
- Weierstrass-féle summáció

⋮

Fejér Lipót (1900) Cesàro-féle szummáció alkalmazása Fourier-sorokra

Fejér-féle összegzés

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor n-edik részletösszege : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$$\sigma_n := \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

Def: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Fejér-összegezhető (Cesàro-szummálható, C_1-szummálható),

ha

és a Fejér-összege S, ha $\sigma_n \to S$.

A definíció kommentárja:

Áll: Ha $S_n \to S$ (azaz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ konvergens), akkor $\sigma_n \to S$.

Biz: Tfh $\lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \geq N$, akkor

$$|S_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ $|\sigma_n - S| = \left| \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} - S \right| \leq \frac{|S_0 - S| + |S_1 - S| + \dots + |S_n - S|}{n+1} =$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N-1} |S_k - S| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n} |S_k - S| \leq \frac{1}{n+1} N \cdot M_N + \underbrace{\frac{n-N}{n+1}}_{\wedge 1} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{N \cdot M_N}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$M_N := \max_{0 \leq k \leq N-1} |S_k - S|$$

ha $\quad n \gg \dfrac{2NM_N}{\varepsilon} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{NM_N}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \quad |\sigma_n - S| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_n \to S$$

!

Vigyázni, akkor láttuk, ez a konvergencia fogalom kibővítése:

$\exists$ nem konvergens sor, mely Fejér-összegezhető, pl $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

$$\sigma_n \to \frac{1}{2}$$

Megj $\quad \sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n+1-k) a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_k$

Tfh

$f(x) = f(x + 2\pi) \qquad$ Fourier-sora

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t)\, dt$$

637/

eml.
$$D_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$$ Dirichlet-féle magfü

$$\Rightarrow \quad \sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\dots+S_n(x)}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \cdot \frac{D_0(t)+D_1(t)+\dots+D_n(t)}{n+1}\,dt$$

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\left(D_0(t)+D_1(t)+\dots+D_n(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\tfrac{1}{2}t+\sin\tfrac{3}{2}t+\dots+\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)+2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\sin\left(\tfrac{3}{2}t\right)+\dots+2\sin\left(\tfrac{1}{2}t\right)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,4\sin^2\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n} 2\sin(2k+1)\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\right] =$$

$$2\sin(2k+1)z\cdot\sin z = \cos 2kz - \cos 2(k+1)z$$

$$z = \frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos \cancel{2}k\frac{t}{\cancel{2}} - \cos \cancel{2}(k+1)\frac{t}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,4\sin^2\frac{t}{2}}\left(1-\cos t+\cos t-\cos 2t+\dots+\cos nt-\cos(n+1)t\right)$$

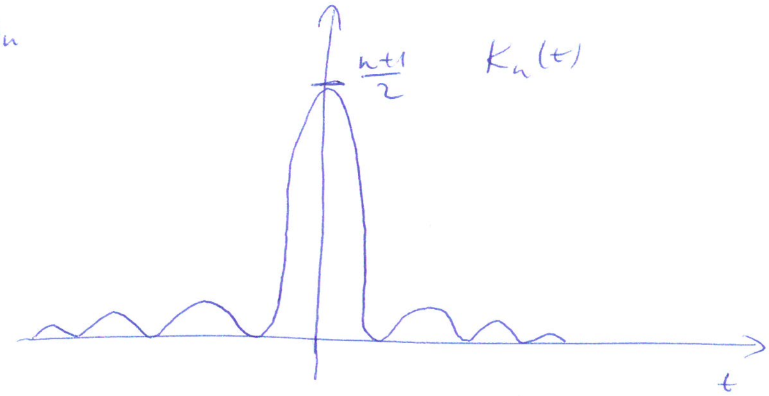
$$= \frac{1}{(n+1)\,4\sin^2\frac{t}{2}}\left(1-\cos(n+1)t\right) = \frac{1}{(n+1)\,2\sin^2\frac{t}{2}}\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)t$$

$$\boxed{K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2} \qquad -\pi < t < \pi$$

Fejér-féle magfüggvény

$$\Rightarrow \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} K_n(t)\, dt$$

1. $K_n(t) \geq 0$ $\Rightarrow$ jobb, mint D_n
2. K_n páros fv
3. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = \pi$



$$\Downarrow$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) K_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0) \right)$$

TÉTEL Ha f integrálható $(-\pi, \pi)$-n és f az x helyen folytonos, akkor

$$\sigma_n(x) \to f(x) \qquad (n \to \infty)$$

Ha f folytonos $[a,b] \subseteq [-\pi, \pi]$ intervallumon, akkor ott

$$\sigma_n \rightrightarrows f \, .$$

(Fejér-tétel)

639/

Biz:

$$|\sigma_n(x)-f(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}K_n(t)\,dt - f(x)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right|K_n(t)\,dt}_{(*)} \le$$

$\Uparrow$

$K_n(t)\ge 0$

$$\le \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0\le|t|\le\delta}(*)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\delta\le|t|\le\pi}(*)\,dt}_{I_2}$$

Válasszunk olyan $\delta>0$-t, melyre $0\le|t|\le\delta$ esetén

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

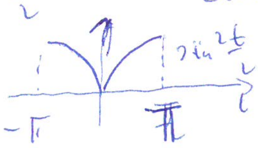
($\exists$ igen, hiszen f folytonos x-ben)

$\Downarrow$

$$I_1 \le \frac{1}{\pi}\int_{0\le|t|<\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon}{2}K_n(t)\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt}_{1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ha $\delta\le|t|\le\pi$

$$\hookrightarrow \quad K_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$



$\Downarrow$

$$I_2 \le \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}\right|dt$$

$$\le \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2(n+1)}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)-2f(x)}{2}\right|dt}_{\wedge|} \le$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)|\,dt+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dt = \underset{\text{konst}}{M}$$

$$\le \underbrace{\frac{M}{2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}}_{\text{konst.}}\cdot\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, ha n elég nagy

$\Rightarrow$ $|\sigma_n(x)-f(x)| \le I_1+I_2 < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ha n elég nagy

↳ $\sigma_n(x) \to f(x)$ $(n\to\infty)$ ✓

Ha f zárt intervallumon folytonos, akkor egyenletesen is folytonos (Heine-tétel) $\Rightarrow$ a fenti bizonyításban $[a,b]$ $\forall$ pontjában jó δ választható $\Rightarrow$ egyenletes konvergencia!

641)

A Fejér-tétel néhány következménye

(1) Ha f Fourier-sora egy olyan x_0 pontban konvergál, melyben $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ léteznek, akkor a Fourier-sor szükségképpen $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$-hoz konvergál.

Biz: ha $S_n(x_0) \to \alpha$, akkor $\sigma_n(x_0) \to \alpha$ miatt

de Fejér-tétel miatt $\sigma_n(x_0) \to \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

!

(2) Fejér-féle approximációs tétel

$\forall$ 2π-szerint periodikus, folytonos függvény tetszés szerinti pontossággal egyenletesen megközelíthető a Fourier-~~~~ sora részletösszegeinek $\sigma_n(x)$ számtani közepeivel.

megj: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$\hookrightarrow$ $\sigma_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{k}{n+1}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$\Uparrow$

n-edrendű trigonometrikus polinom

$$\Downarrow$$

Weierstrass 2. approximációs tétele:

∀ 2π-szerinti periodikus folytonos fv tetszés szerinti pontossággal megközelíthető egyenletesen trigonometrikus polinomokkal

(Megj: Weierstrass-féle első approximációs tétel:

$[a,b]$-n folytonos függvény tetsz. pontossággal egyenletesen megközelíthetők polinomokkal

$\Uparrow$

ez szintén kijön a Fejér-tételből

$\rightsquigarrow$ Csebisev-polinomok   ld: Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós fv-ek és fv-sorok

+ Analízis 1.

Fejér-tétel általánosítása:

TÉTEL (Lebesgue-tétel)

∀ 2π-periodikus, integrálható f függvényre a $\sigma_n(x)$ Fejér-féle közepek majdnem mindenütt az $f(x)$-hez konvergálnak.

Minden olyan x pontban konvergencia van, ahol

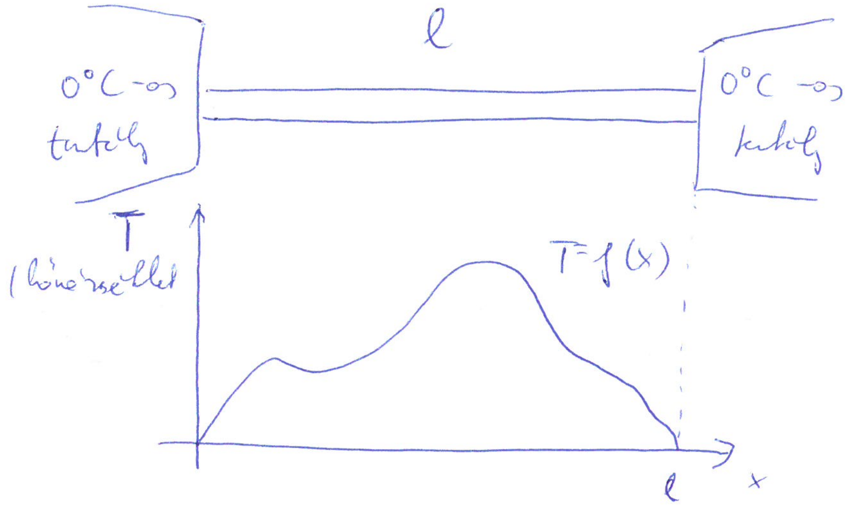
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |\Phi_x(t)|\, dt = 0 \quad , \text{ahol}$$

$$\Phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad !$$

Példák, alkalmazások

① Hővezetés egyenlete

$t=0$ időpontban



$u(x,t)$: x helyen mért hőmérséklet a t időpontban

fizikai levezetés: <u>hővezetés egyenlete:</u>

$$\boxed{u'_t = k\, u''_{xx}} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

k: hődiffúziós együttható (függ az anyag fajlagos hőjétől, sűrűségétől, hővezetési képességétől)

$$\left.\begin{array}{l} \circ \ u(x,0) = f(x) \\ \circ \ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{array}\right\} \text{feltételek}$$

Fourier-módszer 1822.

Tfh $\quad u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ szeparálható alakban

644/

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$\hookrightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\cdot T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\cdot T(t)$$

$\Longrightarrow$

$$X(x)T'(t) = k\,T(t)\cdot X''(x)$$

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{k\,T(t)}}_{\text{csak } t\text{-től függ}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{csak } x\text{-től függ}} = -\lambda$$

(konstans)

– előjel kényelmesebb megoldást ad (konvenció)

$\Downarrow$

- $T'(t) = -\lambda k\, T(t)$

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda k T \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{1}{T}\, dT = -\int \lambda k\, dt$$

$$\ln|T| = -\lambda k t + C$$

$$\boxed{T(t) = C\, e^{-\lambda k t}}$$

645/

- $X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad 0 < x < \ell$

$X(0) = X(\ell) = 0$

$\Longrightarrow \quad \boxed{X(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)}$ (ld. diffegyenletek)

$X'(x) = B \frac{n\pi}{\ell} \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad n \in \mathbb{N}$

$X''(x) = -B \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$

$-B\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) + \lambda B \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) = 0$

$B \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)\left\{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 + \lambda\right\} = 0 \iff \boxed{\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2}$

$\hookrightarrow \quad \left.\begin{aligned} T_n(x) &= C_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k \cdot t} \\ X_n(x) &= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \end{aligned}\right\}$ az egyenlet mindegyik megoldás $\forall n$-re

$\Downarrow$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)}$$

$\hookrightarrow \quad u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) = f(x)$

646)

⇝ Fourier-sor értelme: hogyan lehet f-et felírni így?

Ha $f(x)$ [illegible] szinuszos Fourier-sora:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

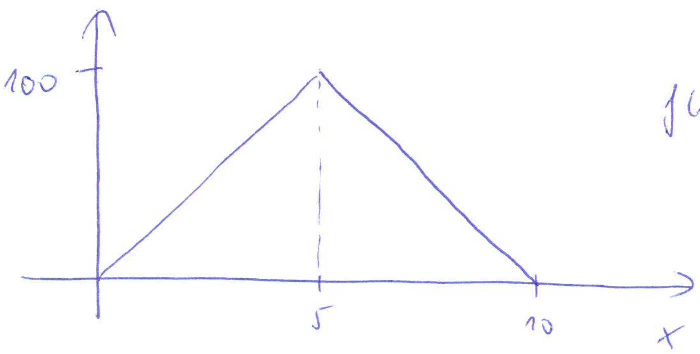
$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)dt$$

$$\Downarrow$$

a megoldás:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

Példa Tfh $\ell = 10$ hosszúságú $k = 1$ hődiffúziós együtthatójú rúd hőmérsékletprofilja $t = 0$-ban



$$f(x) = \begin{cases} 20x & \text{, ha } 0 \le x \le 5 \\ 200-20x & \text{, ha } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

647)

szükségünk van f tiszta szinuszos sorfejtésére :

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{5} 20x \sin \frac{n\pi}{10} x \, dx + \frac{1}{5} \int_5^{10} (200 - 20x) \sin \frac{n\pi}{10} x \, dx =$$

$$= \dots = \frac{800}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 4k \\ 1, & \text{ha } n = 4k+1 \\ 0, & \text{ha } n = 4k+2 \\ -1, & \text{ha } n = 2k+3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{800}{\pi^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)}{1^2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{10} \cdot 3\right)}{3^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{10} 5\right)}{5^2} - \dots \right]$$

$$= \frac{800}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{\pi}{10}(2k+1)x\right)$$

$$\Downarrow$$

658/

$$\boxed{u(x,t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{10}(2k+1)x\right)}$$

$\forall$ $x \in (0,l)$ helyen $\forall$ $t>0$ időpontban numerikus sor alakban megkapjuk a rúd hőmérsékletét!

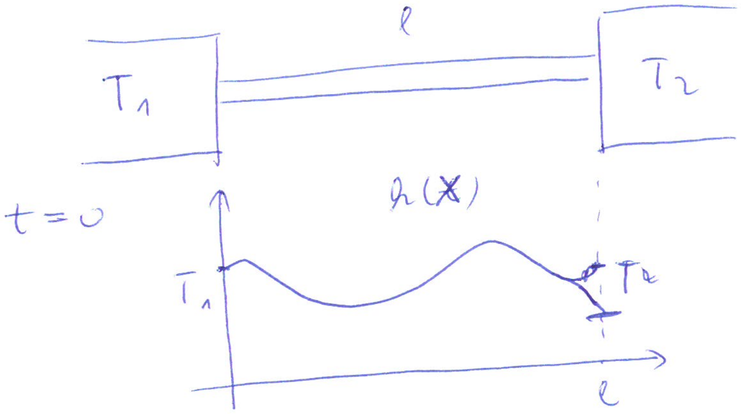
Inhomogén kezdeti feltétel esete

$u'_t = k\, u''_{xx}$ $\quad 0<x<l$, $t>0$

$u(0,t) = T_1$

$u(l,t) = T_2$

$u(x,0) = h(x)$



ötlet: $t \to \infty$ esetén a rúd hőmérséklete kell $v(x)$ egyensúlyi hőmérsékleteloszlásra

$\Downarrow$

$v'_t \equiv 0$ (egyensúlyi ~ független t-től)

de v megoldása a következő egyenletnek

$k\, v''_{xx} = v'_t \equiv 0 \implies v''(x) = 0$

$\Downarrow$

$v(x)$ egyenes kell, hogy legyen

649

$$\left.\begin{array}{l} v(0)=T_1 \\ v(\ell)=T_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v(x)=T_1+\frac{T_2-T_1}{\ell}x}$$

$$w(x,t):=u(x,t)-v(x)$$

- $w'_t = k\, w''_{xx}$
- $w(0,t)=u(0,t)-v(0)=T_1-T_1=0$

  $w(\ell,t)=u(\ell,t)-v(\ell)=T_2-T_2=0$
- $w(x,0)=u(x,0)-v(x)=h(x)-\left(T_1+\frac{T_2-T_1}{\ell}x\right)$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_t = k\, w''_{xx} \\ w(0,t)=w(\ell,t)=0 \\ w(x,0)=h(x)-\left(T_1+\frac{T_2-T_1}{\ell}x\right)=f(x) \end{array}\right\} \text{visszavezettük az előző esetre}$$

$$\hookrightarrow \quad w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 k t} \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left(h(t)-\left[T_1+\frac{T_2-T_1}{\ell}t\right]\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)dt$$

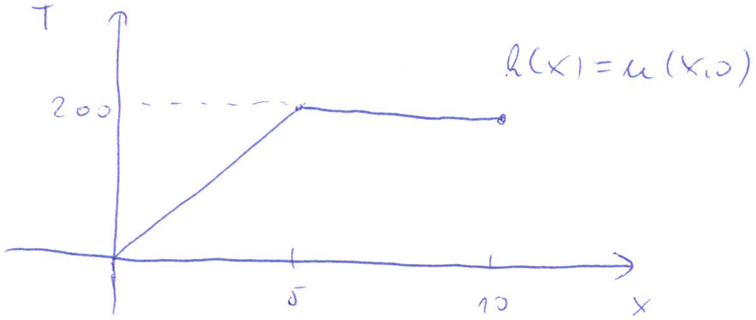
$$\Downarrow$$

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x)$$

650/

PC1

$$h(x) = \begin{cases} 40x, & 0 \le x \le 5 \\ 200 & 5 \le x \le 10 \end{cases}$$



$T_1 = 0,\ T_2 = 200,\ \ell = 10,\ k = 1$

$$\left.\begin{aligned} &u'_t = u''_{xx} \\ &u(0,t) = 0,\ u(10,t) = 200 \\ &u(x,0) = h(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v(x) = 20x$$

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x)$$

$$w'_t = w''_{xx}$$

$$w(0,t) = w(10,t) = 0$$

$$w(x,0) = h(x) - v(x) = \begin{cases} 20x & 0 \le x \le 5 \\ 200 - 20x & 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

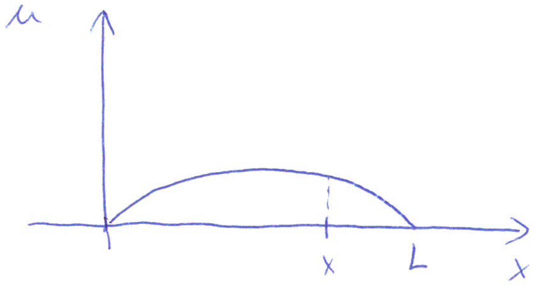
ld előáll

$$w(x,t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{10}\right)^2 t}}{(2n+1)^2} \sin\left(\frac{\pi}{10}(2n+1)x\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = w(x,t) + 20x}$$

651)

② Rezgő húr problémája



$u(x,t)$: a húr x-beli kitérése a t időpontban

fizika $\Rightarrow$ $$\boxed{u''_{tt} = c^2 u''_{xx}}$$ $c>0$

$u(x,0) = f(x)$ $\rightsquigarrow$ a húr $t=0$ időpontbeli alakja

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,0)} = g(x)$ $\rightsquigarrow$ sebességprofil

$u(0,t) = u(L,t) = 0$: rögzített végű húr

David Bernoulli megoldása

$u(x,t) := X(x)T(t)$ $\rightsquigarrow$ $u''_{xx} = X''(x) \cdot T(t)$

$u''_{tt} = X(x)T''(t)$

$\hookrightarrow$ $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\alpha^2$$ (fizikai megfontolás miatt)

$\|$
konstans

65.2/

(1) $\frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2 \rightsquigarrow \boxed{T''(t)+\alpha^2 T(t)=0}$

(2.) $\boxed{X''(x)+\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x)=0}$ $\left(\Leftarrow \quad c^2\frac{X''(x)}{X(x)}=-\alpha^2\right)$

megoldásaik (ld. Diffegyenletek)

$T(t)=A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t)$

$X(x)=C\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right)+D\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)$

$\hookrightarrow u(x,t)=X(x)T(t)=\left(A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t)\right)\left(C\cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right)+D\sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right)$

$u(0,t)=\left(A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t)\right)\cdot C = 0 \quad \forall t\geq 0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$u(L,t)=\left(A\cos(\alpha t)+B\sin(\alpha t)\right)\cdot D\sin\left(\frac{\alpha}{c}L\right)=0 \quad \forall t\geq 0$

$\Downarrow$ $D=0$ nem jó

$\sin\left(\frac{\alpha}{c}L\right)=0$

$\Downarrow$

$\frac{\alpha}{c}L=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

$c>0$

$\hookrightarrow \boxed{\alpha_k=\frac{kc\pi}{L} \quad k=1,2,\ldots}$

653

$$\Downarrow$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left[A_k\cos\left(\frac{kc\pi}{L}t\right)+B_k\sin\left(\frac{kc\pi}{L}t\right)\right]$$

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$ ⇝ A_k együtthatók f szinusz Fourier-együtthatói

$$u'_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-A_k\alpha_k\sin\alpha_k t+B_k\alpha_k\cos\alpha_k t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$\Downarrow$$

$$u'_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k B_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)=g(x)$$

legyen ha $g(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ Fourier-sor

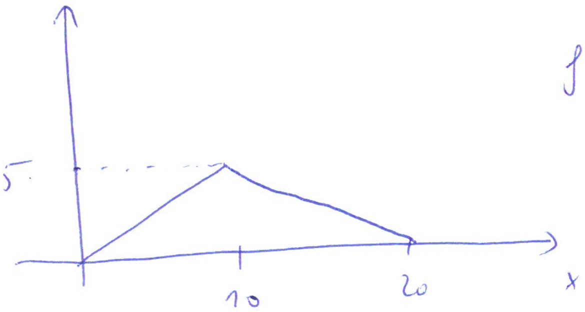
↳ $\alpha_k B_k=b_k \Rightarrow \boxed{B_k=\frac{b_k}{\alpha_k}=\frac{L\,b_k}{kc\pi}}$

$\Downarrow$ A_k és B_k ismertek

$u(x,t)$ megoldás

Példa $\quad c = 1, \quad L = 20$

$t = 0$



$$f(x) = \begin{cases} 0{,}05\,x, & \text{ha } 0 \le x \le 10 \\ 1 - 0{,}05\,x, & \text{ha } 10 \le x \le 20 \end{cases}$$

t/h $\quad g(x) \equiv 0 \quad$ (elengedjük a húrt → nem adunk neki kezdeti sebességet)

$$\Rightarrow \quad A_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{20}\int_0^{10} 0{,}05\,x \sin\left(\frac{k\pi}{20}x\right)dx$$

$$+\ \frac{2}{20}\int_{10}^{20} (1 - 0{,}05\,x)\sin\frac{k\pi}{20}x\,dx = \ldots = \frac{40}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

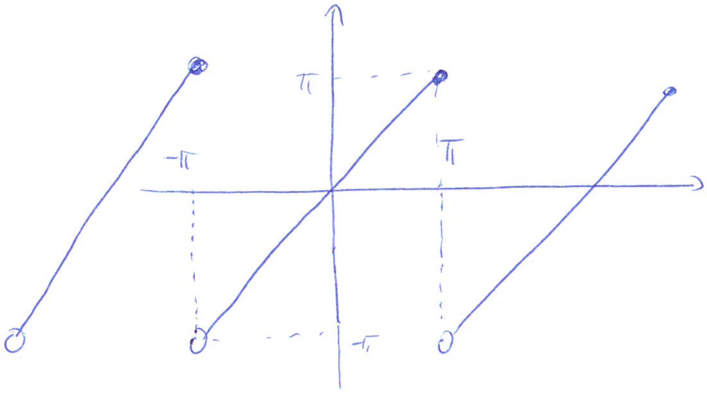
$$\Downarrow$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{k\pi}{20}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{20}x\right)$$

655/

Példák Fourier-sorfejtésre

(1) $f(t) := t$, ha $-\pi < t \le \pi$ + 2π-periodikus



f páratlan $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin nt\,dt \underset{\text{parc. int}}{=} \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} +$$

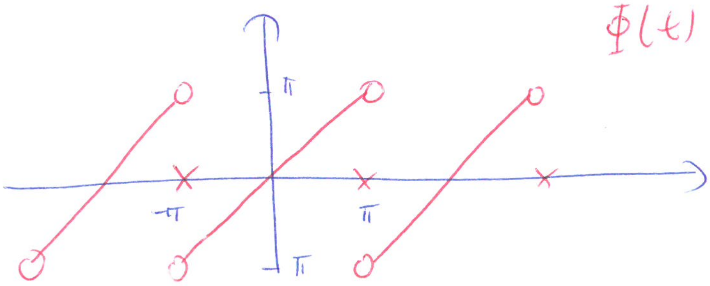
$u = t \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = \sin nt \rightsquigarrow v = -\frac{\cos nt}{n}$

$$+\frac{2}{n\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nt\,dt}_{\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = 0} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi\cos n\pi}{n} = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$$f(t) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt = \Phi(t)$$



pl $t=\frac{\pi}{3}$ -ban előállítja a függvényt:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}=\Phi\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\underbrace{\sin n\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\dots}=$$

$$\underline{\underline{=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\dots}}$$

(2) Határozzuk meg $f(t)=\frac{1}{12}\left(\pi^2 t-t^3\right)$, ha $-\pi\le t\le\pi$

\+ páratlan kiterjesztés Fourier-sorát!

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\dots=?$$

Dolgozhatunk az előző alapján:

láttuk:
$$t=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt \qquad t\neq k\pi$$

$\Downarrow$ TÉTEL: tagonként integrálható

$$\frac{t^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\underbrace{\int_0^t \sin nt\,dt}_{\left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_0^t=-\frac{\cos nt}{n}+\frac{1}{n}} \quad =$$

$$= 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{\Uparrow\ \frac{\pi^2}{12}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots$$ ($f(t)=t^2$ Fourier-sorából HF)

$$\hookrightarrow \quad \frac{t^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt$$

$\Downarrow$ tagonként integrálva

$$\int_0^x \frac{t^2}{4}\,dt = \left[\frac{t^3}{12}\right]_0^x = \frac{x^3}{12} = \frac{\pi^2}{12}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\underbrace{\int_0^x \cos nt\,dt}_{\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^x = \frac{\sin nx}{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^3}{12} = \frac{\pi^2}{12}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$\Downarrow$

a keresett sor:

$$\boxed{\frac{1}{12}\left(\pi^2 x - x^3\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\sin nx}$$

658)

$x = \frac{\pi}{2}$ $\rightsquigarrow$ $\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{, ha } n \text{ páros} \\ (-1)^k & \text{, ha } n = 2k+1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\boxed{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots = \frac{\pi^3}{32}}$$

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

SIKERES VIZSGAIDŐSZAKOT

KÍVÁNOK!