569/

Fourier-sorok

Tfh f 2π-szerint periodikus $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény

$$f(x)=f(x+2\pi)$$

↳ az ilyen függvények approximálását (megközelítését) trigonometrikus polinomokkal érdemes megtenni

Def.

- A $T_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\equiv$

$$\equiv\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\qquad ,a_k,b_k\in\mathbb{R}\quad k=0,\dots,n$$

alakú függvényeket n-edrendű trigonometrikus polinomnak hívjuk

- $$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$a_k,b_k\in\mathbb{R}$

trigonometrikus sor

Kérdés
1. Megkapható-e az összes 2π-periodikus függvény így?
2. Ha nem, melyek kaphatók így meg?
3. Egyértelmű-e az előállítás?

T70/

TÉTEL Ha az $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $[-\pi, \pi]$-n (és így $\mathbb{R}$-en) és a sor összege $f(x)$, akkor f folytonos és

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx \qquad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx \qquad k \geq 1$$

Lemma: $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\,dx = \begin{cases} \pi, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx\,dx = 0$$

Bz (Lemma)

° $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}(\pi - (-\pi)) = \pi$$ ✓

577)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cancel{\cos} \sin mx \, dx \underset{n=m}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \quad \checkmark$$

- $\underline{n \neq m}$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \checkmark$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

↳ sin-ra hasonlóan ✓

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos nx \cdot \sin mx}_{\text{páratlan fv}} \, dx \overset{\uparrow}{=} 0$$

\+ origóra szimmetrikus intervallumon integrálunk

! ..

Megj: Kronecker-delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=j \\ 0, & \text{ha } i\neq j \end{cases} \implies \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \pi\,\delta_{nm}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \pi\,\delta_{nm}$$

57/

Biz (TÉTEL)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{egyenletesen}$$

- $m \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \cdot \cos mx = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx \cdot \cos mx + b_k \sin kx \cdot \cos mx) dx$$

$$\hookrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx \cdot \cos mx + b_k \sin kx \cdot \cos mx) dx =$$

$$\underset{\text{egy. konv.}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx \, dx}_{\pi \delta_{km}} + \sum_{k=0} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx}_{=0 \ (\text{lemma})}$$

$$= a_m \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \qquad m \geq 1}$$

- $m = 0$

$$\hookrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, dx =$$

$$\underset{\text{egy. konv}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} \Big\{ a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx}_{\substack{0, \text{ ha } k \neq 0 \\ 2\pi, \text{ ha } k = 0}} + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx}_{=0} \Big\} = 2\pi a_0$$

573/

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

- $\sin mx$ -nel $(m \neq 0)$ szorozva hasonlóan: (HF)

$$\boxed{b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx} \qquad k \geq 1$$

!

Megj. ① ~~Mivel~~ Ha $f(x+p)=f(x)$ p-szerint periodikus fv, amely integrálható, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^{p} f(x)\,dx$$

$\forall$ p hosszúságú intervallumon integrálva ugyanazt kapjuk

↪ a fenti formulákban $\int_{-\pi}^{\pi}$ helyettesíthető $\int_0^{2\pi}$-el, $\int_a^{a+2\pi}$-el

② A fenti formulákat már Euler levezette, de a mélyebb vizsgálatokat Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) végezte

$\Downarrow$

574)

Def: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-szerint periodikus, integrálható függvény Fourier-során a

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sort értjük, ahol

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx \end{aligned}\right\} \text{Fourier-együtthatók}$$

.

Megj:

① A fenti tétel szerint:

Ha egy trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, akkor a sor műveletképpen az összegfüggvényének a Fourier-sora.

② Minden Fourier-sor trigonometrikus sor, de a megfordítás nem igaz:

pl. $\sum_n \sin(n!\,x)$ konvergens $\forall x \in \mathbb{Q}$-ban, de nem Fourier-sora egyetlen függvénynek sem!

575/

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln(1+n)}$ konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, de

  $\nexists$ f (abszolút) integrálható fv, melyre

  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\ln(1+n)}$$

(3.) • $f(x)$ páratlan $\Rightarrow$ $a_k = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}_{\text{ptlan}} = 0 \Rightarrow \boxed{a_k = 0}_{k \geq 0}$

• $f(x)$ páros $\Rightarrow$ $\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx}_{\text{ptlan}} = 0 \Rightarrow \boxed{b_k = 0}_{k \geq 1}$.

(4.) $\exists$ trigonometrikus sor, amely Fourier-sor, de divergál!
(pontosan néhány alkalmasnál, pl Brown-mozgás)

(5) Általában nem várható el, hogy egy függvényt a Fourier-sora előállítsa:

pl ha f-et 1 pontban megváltoztatom $\Rightarrow$ Fourier-együtthatók nem változnak
$\Downarrow$
Fourier-sor nem változik

$\Downarrow$

(6) gyakori jelölés:

$$f(x) \sim \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

576/

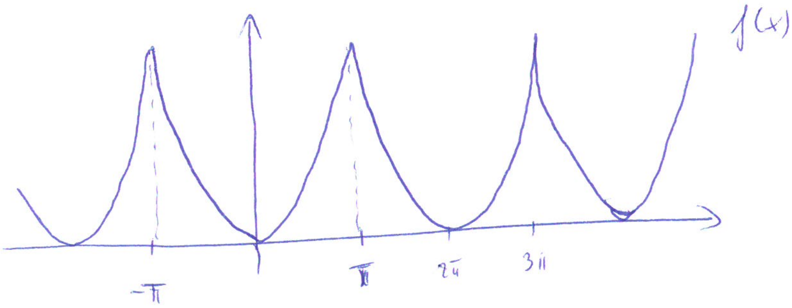
Jó kérdések

(1) Folytonos 2π-szerinti függvényt előállítja-e a Fourier-sora? (itt nem változtathatjuk meg 1 pontban a függvényt)

(2) $\exists$-e olyan folytonos 2π-szerinti periodikus függvény, melynek Fourier-sora konvergens, de az összeg sehol sem egyenlő a függvénnyel?

Példák

(1) $f(x) = x^2$, ha $|x| \le \pi$ + periodikus kiterjesztés:



- $f(x)$ páros $\Rightarrow$ $b_k = 0$ $\quad k \ge 1$

- $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

- $k \ge 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\,dx =$$

parc. int.

$u = x^2 \rightsquigarrow u' = 2x$

$v' = \cos kx \quad v = \frac{\sin kx}{k}$

577/

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \underbrace{\left[x^2 \frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi 2x \frac{\sin kx}{k}\,dx \right\} \underset{\text{parc. int}}{=}$$

$u = x \quad \rightsquigarrow \quad u' = 1$

$v' = \sin kx \quad v = -\frac{\cos kx}{k}$

$$= -\frac{4}{\pi k}\left\{ \underbrace{\left[-x \frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi}_{= -\frac{\pi}{k}\cos k\pi} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}\,dx}_{\left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi = 0} \right\} =$$

$$= \frac{4}{k^2}\cos k\pi = \frac{4}{k^2}(-1)^k = a_k$$

$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ ps} \\ -1, & \text{ha } k \text{ ptlan} \end{cases} = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x) \sim \Phi(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx}$$

$$f_n(x) := \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \ge 1 \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konv}$$

$\underset{\text{Weierstrass}}{\Longrightarrow}$ $\Phi(x)$ egyenletesen konvergens $\underset{\text{TÉTEL}}{\Longrightarrow}$ Φ előállítja f-et

$\Downarrow$

578/

Vagyis:

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

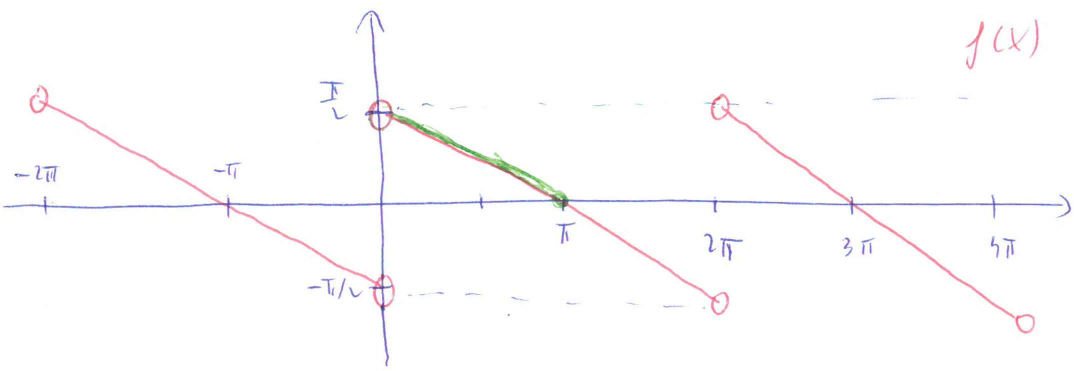
pl.: $x=0$: $f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos n\cdot 0}_{=1}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}}_{-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\dots} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

(2) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, ha $0 < x \leq \pi$ + páratlan módon kiterjesztjük 2π periodikusan:



579/

- f páratlan $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\quad n \geq 0$

- $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \underset{\text{szimm.}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx \underset{\text{parc. int}}{=}$$

$u = \frac{\pi - x}{2} \rightsquigarrow u' = -\frac{1}{2}$

$v' = \sin nx \rightsquigarrow v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x-\pi}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{2n}\,dx}_{\frac{1}{2n}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-\pi)}{2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$f(x) \sim \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

előállítja-e f-et? (visszatérünk rá)

<u>Megj</u> rendlektetés:

Legyen V egy n dimenziós <u>euklideszi tér (valós)</u>

- $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ skalárszorzat

$\Downarrow$

indukált norma: $\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

$\Downarrow$

indukált metrika: $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\| = \sqrt{\langle \underline{v}-\underline{w}, \underline{v}-\underline{w} \rangle}$

580)

Legyen V-ben $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázis (ONB)

vagyis $\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$, $\|\underline{e}_i\| = 1$ $\forall i = 1, \dots, n$

↳ $\forall\ \underline{v} \in V$-re

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + \dots + v_n \underline{e}_n \quad \text{egyértelműen}$$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ a $\underline{v}$ vektor koordinátái az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisban

Hogyan kaphatjuk meg a koordinátákat?

$$\langle \underline{e}_k, \underline{v} \rangle = \langle \underline{e}_k, v_1 \underline{e}_1 + \dots + v_n \underline{e}_n \rangle =$$

$$= v_1 \underbrace{\langle \underline{e}_k, \underline{e}_1 \rangle}_{0} + v_2 \underbrace{\langle \underline{e}_k, \underline{e}_2 \rangle}_{0} + \dots + v_k \underbrace{\langle \underline{e}_k, \underline{e}_k \rangle}_{1} + \dots + v_n \underbrace{\langle \underline{e}_k, \underline{e}_n \rangle}_{0}$$

$$= v_k$$

vagyis

$$\boxed{\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \langle \underline{e}_k, \underline{v} \rangle \underline{e}_k}$$

581/

analógia

$C[0,2\pi]$ vagy $C[-\pi,\pi]$

vektortér

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \qquad f,g \in C[-\pi,\pi]$$

↳ skalárszorzatot definiál

Lemma $\Rightarrow$ $\varphi_0(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad x \in [-\pi,\pi]$

$$\varphi_1(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \qquad \varphi_2(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$$

$$\varphi_3(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2\pi \qquad \varphi_4(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

↳ $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ONB $C[-\pi,\pi]$-n

$$\forall\ f \in C[0,2\pi] \rightsquigarrow f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \qquad (*)$$

és $\alpha_k = \langle \varphi_k, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) f(x)\,dx$

ezeket leírva $(*)$ éppen a Fourier-sor.

Mit jelent itt a konvergencia?

$$\Phi_n := \cancel{a_0} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\Phi_n \to f \iff d(\Phi_n, f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \int_{-\pi}^{\pi} (\Phi_n - f)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ebből még nem következik pontonkénti konv!

582)

TÉTEL (Riemann-lemma)

Ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x)\sin px \, dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x)\cos px \, dx = 0$$

Biz (vázlat)

- Ha f folytonosan diff.ható, akkor parciális integrálással:

$$\int_a^b f(x)\sin px \, dx \underset{P}{=} \left[-f(x)\frac{\cos px}{p}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos px}{p}\, dx \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

$u = f \quad u' = f'$

$v' = \sin px \quad v = -\dfrac{\cos px}{p}$

($f(x)\cos px$ és $f'(x)\cos px$ korlátosak)

- Ha f tetszőleges integrálható, akkor mivel a folytonosan diff.ható függvények sűrűn vannak az integrálható függvények terében (később)

$\Downarrow$

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ f_\varepsilon$ folytonosan diff.ható, hogy

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Downarrow$

583/

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x)-f_\varepsilon(x))\sin px\,dx\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin px\,dx\right|$$

$$\left|\int_a^b (f(x)-f_\varepsilon(x))\sin px\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\cdot|\sin px|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int_a^b |\sin px|\,dx$$

tetszőlegesen kicsi, mert ε tetsz. kicsi

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin px\,dx\right| \xrightarrow{p\to\infty} 0$$

(ld. folytonosan diffható)

!

Mikor állítja elő f Fourier-sora az f függvényt?

Eml: Taylor-soroknál:

Ha $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ konvergens (x_0-R, x_0+R)-en és az összege $f(x)$,

akkor $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, vagyis ekkor az a Taylor-sor

de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ akárhányszor diffható, Taylor-sora mindenütt konvergens és összege $\equiv 0$

$\Downarrow$

$x=0$ körül nem állítja elő a Taylor-sor f-et.

585)

① Zárt formula levezetése $S_n(x)$ n-dik részletösszegére:

$$S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

↳ $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad k \in \mathbb{N} \qquad \text{(egységesség kedvéért)}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \qquad k \geq 1 .$$

↳ $$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \right) \cos kx + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \right) \sin kx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \sin kx \right)} \right\} dt =$$

$$\boxed{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)} \Rightarrow \quad \cos(k\cancel{t} - k\cancel{x}) = \cos k(t-x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} dt$$

585/

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha =$$

Euler-formula $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}+\frac{e^{i2\alpha}+e^{-i2\alpha}}{2}+\ldots+\frac{e^{in\alpha}+e^{-in\alpha}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\left(1+e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}+\ldots+e^{in\alpha}\right)}_{\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(e^{-i\alpha}+e^{-i2\alpha}+\ldots+e^{-in\alpha}\right)}_{e^{-i\alpha}\frac{1-e^{-in\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}=\frac{1-e^{-in\alpha}}{e^{i\alpha}-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}-1+e^{-in\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right\}=\frac{1}{2}\frac{e^{-in\alpha}-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}=$$

osszuk el a számlálót és a nevezőt is $e^{i\frac{\alpha}{2}}$-vel

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{-i\alpha\frac{2n+1}{2}}-e^{i\alpha\frac{2n+1}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{i\alpha\frac{2n+1}{2}}-e^{-i\alpha\frac{2n+1}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$$

5 86/

Átalmanzuk ezt Si-re:

$$\boxed{S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} dt$$

$$\boxed{= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1) \frac{x-t}{2}}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dt}$$

Dirichlet-féle integrál

$u := t - x \quad \leadsto \quad t = u + x \qquad -\pi \leq u + x \leq \pi$

$-\pi - x \leq u \leq \pi - x$

de a periodikusság miatt

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} = \int_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin (2n+1) \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} du}$$

$$D_n(u) := \frac{\sin (2n+1) \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

Dirichlet-féle magfüggvény

$$\hookrightarrow \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) \, du$$

587/ perre a periodikusság miatt:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+u) D_n(u)\, du$$

Ezzel:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u)\, du + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x+u) D_n(u)\, du =$$

$u \Leftrightarrow -u$ csere

$\hookrightarrow$ $du \Leftrightarrow -du$

$\pi \le u \le 2\pi \Leftrightarrow -\pi \ge -u \ge -2\pi$

$+ D_n$ páros

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u)\, du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-2\pi} f(x-u) D_n(u)\, du =$$

eltolom egy periódussal

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u)\, du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-u) D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+u) + f(x-u) \right] D_n(u)\, du$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+u) + f(x-u) \right] D_n(u)\, du}$$ Dirichlet-forma

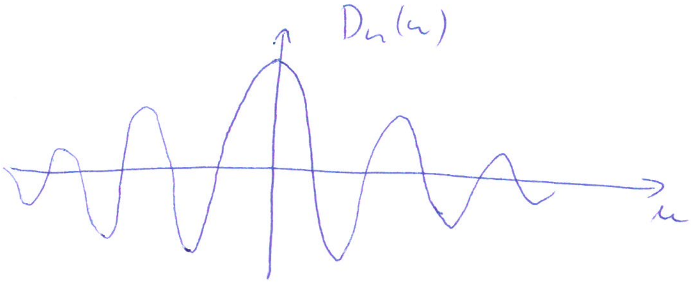
$\hookrightarrow$ mutatja, hogy a Fourier-sor részletösszegének viselkedését

$f(x+u) + f(x-u)$ határozza meg.

588/

Fourier-sor konvergenciájának elégséges feltétele

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$$



- páros fv

- $\displaystyle\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{u\to 0} D_n(u) = \frac{2n+1}{2}$$

$\Downarrow$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,D_n(u)\,du$$

$$\hookrightarrow \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)\right]D_n(u)\,du - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,D_n(u)\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\left[f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right]}_{\Phi_x(u) := f(x+u)+f(x-u)-2f(x)} D_n(u)\,du$$

$$\Rightarrow \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_x(u)\,D_n(u)\,du$$

Eml: (jelölések)

$$f(x+0) = \lim_{y\to x+0} f(y) \qquad \text{tfh } \exists\text{-nek}$$

$$f(x-0) = \lim_{y\to x-0} f(y)$$

585)

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'_+(x)$$

félolddali deriváltak

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(x-0)-f(x-t)}{t} = f'_-(x)$$

Megj: ha f diffható x-ben $\Rightarrow f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$

TÉTEL Ha $f'_+(x)$ és $f'_-(x)$ létezik, akkor az x pontban az f függvény Fourier-sora konvergens és az összege

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Biz: $$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi_x(u) D_n(u)\,du \underset{0<\delta<\pi}{=}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \Phi_x(u) D_n(u)\,du + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \Phi_x(u) D_n(u)\,du$$

Feltehetjük, hogy $f(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, mert x helyen a függvény értékét megváltoztatva a Fourier-együtthatók nem változnak $\Rightarrow$ Fourier-sor nem változik

590)

$\Downarrow$

I.

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{u}\right]\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\cdot\frac{u}{2}\,du$$

$$+\ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)\right]\frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

II.

I. tag becslése

- $f'_+(x),\ f'_-(x)\ \exists \implies \left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right|+\left|\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\right|<K$

  valamely ~~adott~~ K-ra

  ha $0<u<\delta<\pi$ és δ kicsi

- $\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\nearrow\ (0,\pi)$-n $\implies \frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}<\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$, ha

  $0<u<\delta$

- $\sin(2n+1)\frac{u}{2}\le 1$

$$\implies \underline{\underline{\mathrm{I.}}}\le\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}K\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}\,du=\frac{1}{\pi}K\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\delta=\underline{\underline{\delta\cdot\frac{K}{2}}}$$

591)

II. tag becslése

Legyen $\varepsilon > 0$ tetsz. és δ olyan, hogy $\delta \cdot \frac{K}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$

(K I. becslésből a konstans)

$\Downarrow$

(δ, π)-n

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \quad \text{integrálható}$$

Riemann-lemma

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{2 \sin \frac{u}{2}} \cdot \sin(2n+1)\frac{u}{2}\, du = 0$$

vagyis $\quad \text{II.} \to 0$, ha $n \to \infty$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \quad \text{II.} < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > N$

$\hookrightarrow \quad |S_n(x) - f(x)| \le \text{I.} + \text{II.} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ha $n > N$

$+ \quad \varepsilon$ tetszőleges

$$\hookrightarrow \quad S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

☺

Bebizonyítottunk egy elégséges feltételt pontonkénti konvergenciára.

Kérdés: Lehet-e a feltételt enyhíteni?
Pl ha f folytonos x-ben, akkor a Fourier-sor konvergens-e x-ben (a féloldali deriválhatóságtól eltekintünk).

Megj: ① $\exists$ olyan folytonos függvény, melynek Fourier-sora divergens egy adott pontban!
(1876. Du Bois Raymond $\rightsquigarrow$ Fejér Lipót példája
(ld. Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvénysorok))

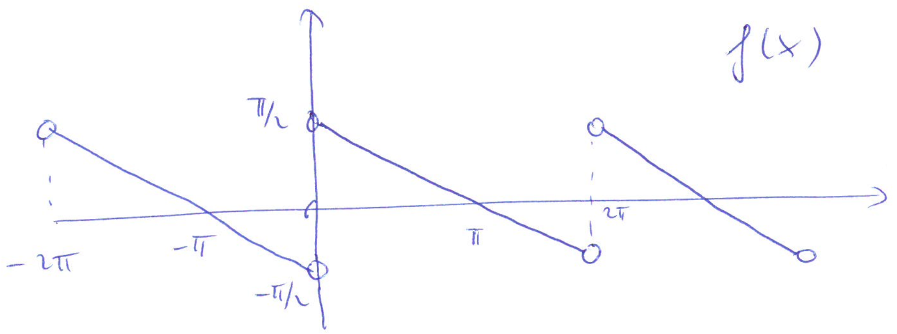
② $\exists$ olyan integrálható függvény, melynek Fourier-sora mindenütt divergál. (Kolmogorov)

③ Ha f folytonos, akkor a Fourier-sora 0-mértékű halmaztól eltekintve konvergens.
(Carleson 1966.)

JS3/

Példák

(1) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, ha $0 < x < \pi$ + 2π-szerinti páratlan kiterjesztés



láttuk: $a_n = 0 \quad n \geq 0$

$b_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1$

$$f(x) \sim \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

ha $x \neq 2k\pi \Rightarrow f$ folytonos x-ben, mindkét oldali derivált $\exists$ (sőt, ~~ezen~~ deriválható)

$\hookrightarrow$ $\cancel{f(x)}$ $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$

$\Uparrow$ folytonosság

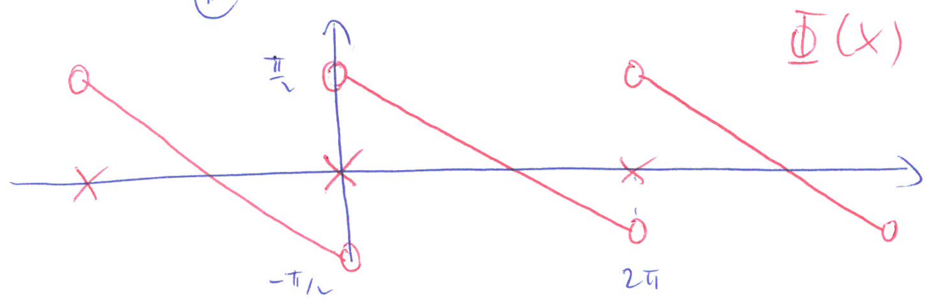
TÉTEL

$\Rightarrow$ $x \neq 2k\pi$-ben Φ előállítja f-et

ha $x = 2k\pi \Rightarrow$ mindkét oldali derivált $\exists$

$\hookrightarrow$ $\Phi(x) = \cancel{f(2k\pi}$ $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$

$\Downarrow$



594)

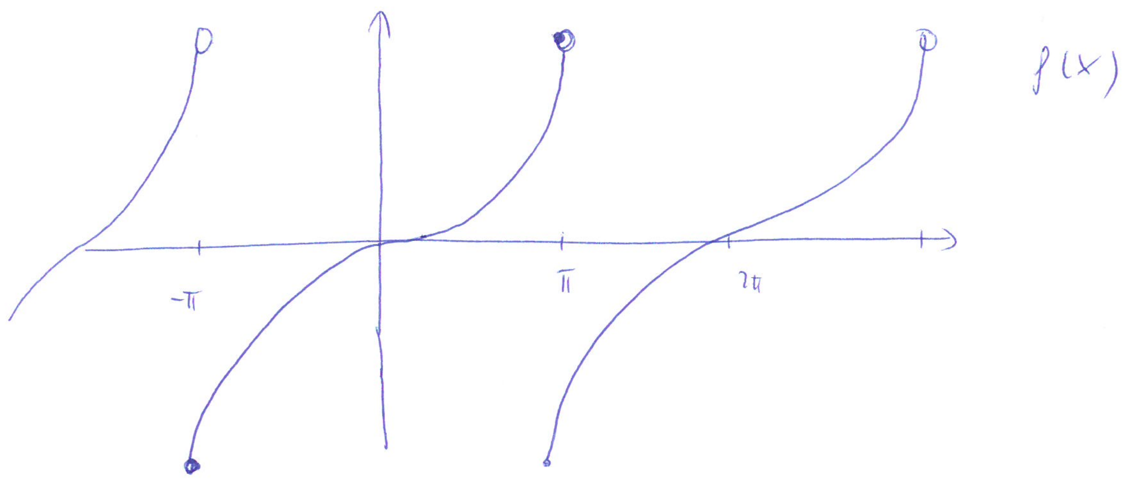
pl: $x = \frac{\pi}{2}$ -ben

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$$

$$\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ (-1)^k, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}$$

(2) $f(x) = x^3$, ha $-\pi \le x < \pi$ + 2π periodikus kiterjesztés



$f(x)$ páratlan $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $n \ge 0$

595)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\sin nx}_{ps.}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx =$$

par. int.

$u = x^3 \rightsquigarrow u' = 3x^2$

$v' = \sin nx \rightsquigarrow v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \left[-x^3 \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \right\} =$$

$$\left[-x^3 \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = -\pi^3 \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{n}$$

par. int

$u = x^2 \rightsquigarrow u' = 2x$

$v' = \cos nx \rightsquigarrow v = \frac{\sin nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{n} + \frac{3}{n}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx \right\} =$$

$$\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

par. int

$u = x \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = \sin nx \rightsquigarrow v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{n} - \frac{6}{n^2}\left[-\frac{x\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{6}{n^3}\underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx\, dx}_{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0} \right\}$$

$$\left[-\frac{x\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n^3} \right\} = \underline{\underline{\frac{(-1)^{n+1}2\pi^2}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}}}$$

556

$$\Rightarrow \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3}$$

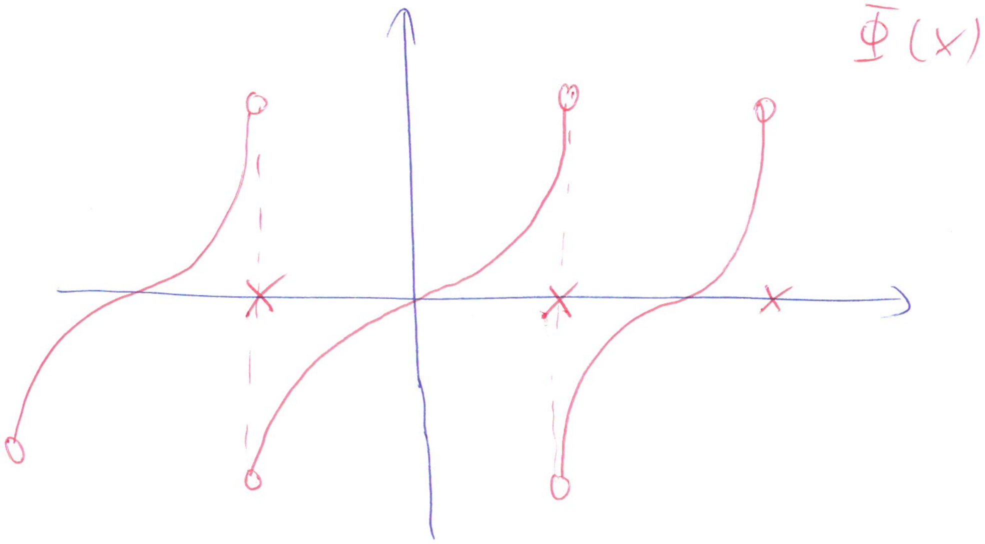
$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{12(-1)^n}{n^3} \right) \sin nx$$

$f(x)$ féloldali deriváltjai mindenütt léteznek

$$\Downarrow$$

x helyen előállított érték

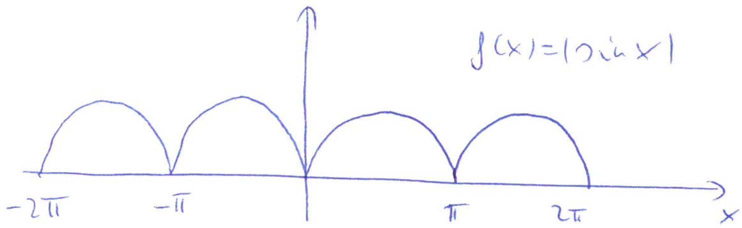
$$\Phi(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$



597/

③ $f(x) = \sin x$, ha $0 \le x < \pi$ + páros módon való periodikus kiterjesztés

$\hookrightarrow$ $f(x) = |\sin x|$ $\quad x \in \mathbb{R}$



$f(x)$ páros $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos nx\,dx =$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(x-nx)+\sin(x+nx)\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(1-n)x+\sin(1+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1-n)x}{1-n} - \frac{\cos(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{\cos(1+n)\pi}{1+n} - \frac{1}{1-n} - \frac{1}{1+n}\right\}$$

$n \neq 1$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\overset{\cos(n-1)\pi}{\overset{\parallel}{\cos(1-n)\pi}} + n\cos(1-n)\pi + \cos(1+n)\pi - n\cos(1+n)\pi - 1 - n - 1 + n}{1-n^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n-1} + \cancel{n(-1)^{n-1}} + (-1)^{n+1} - \cancel{n(-1)^{n+1}} - 2}{1-n^2}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n + (-1)^{n+2} + 2}{\pi(1-n^2)} = \frac{2+2\cdot(-1)^n}{\pi(1-n^2)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \dfrac{4}{\pi(1-n^2)}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

558)

• $\underline{n=0}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\big(\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \underbrace{\cos 0}_{1}\big) =$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

• $\underline{n=1}$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi} = 0$$

• $\underline{n>1}$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, ha } n \text{ ptlan} \\ \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{, ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-(2k)^2}\cos 2kx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

Mivel $x \neq k\pi$ esetén f deriválható $\Rightarrow \Phi(x) = f(x)$.

Mivel $x = k\pi$ helyen mindkét féloldali derivált $\exists$

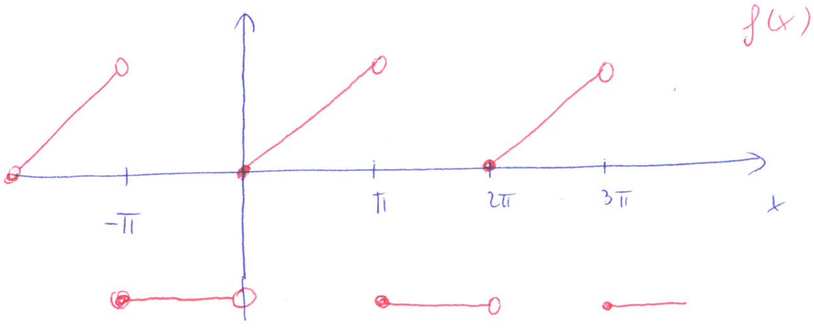
$$\hookrightarrow \quad \Phi(k\pi) = \frac{f(k\pi+0)+f(k\pi-0)}{2} = 0$$

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

-99/

(5)

$$f(x)=\begin{cases} -\pi & , \ -\pi \le x < 0 \\ x & , \ 0 \le x < \pi \end{cases} \quad + \text{ periodikus kiterjesztés}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = -\underbrace{\left[x\right]_{-\pi}^{0}}_{\pi} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}}_{\frac{\pi^2}{2}} =$$

$$= -\pi + \frac{\pi}{2} = \underline{-\frac{\pi}{2}}$$

$\underline{n \ge 1}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right) \underset{\pi}{=}$$

parc. int.

$u = x \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = \cos nx \rightarrow v = \frac{\sin nx}{n}$

$$= -\underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}}_{0} + \frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\left[x\,\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx}_{\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } n \text{ ps} \\ -\frac{2\pi}{n^2} & , \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases}$$

600/

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{-\pi}^{0} -\pi \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx \right\} = \ldots = \frac{1-\cos n\pi}{n} =$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{n} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, ha } n \text{ ps} \\ \frac{2}{n} & \text{, ha } n \text{ ptlan} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2} - \ldots$$

$$+ 3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$$

és ahol folytonos előállítja a fv-t

<u>$x=0$</u> -ban $\quad \frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

<u>$x=\pi$</u> -ben $\quad \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = 0$