# Kvadratikus alakok

**1.) Feladat:** Transzformáljuk négyzetösszegé a következő kvadratikus alakot

$$\mathbf{Q}(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = -x_1^2 + 10x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2 \,.$$

**Megoldás:** A feladat a következővel ekvivalens: keressük meg azt a bázist, amelyben a kiindulási bázisban adott kvadratikus alak (fent) négyzetösszeggé válik.
A megoldás menete:

1. Meghatározzuk a $\mathbf{Q}$ kvadratikus alak $\mathbf{A}$ mátrixát, azaz azt a mátrixot, melyre $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ esetén

   $$\mathbf{Q}(\underline{x}) = \underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x} \,.$$

   Ez medig nem más, mint

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \,.$$

*Ismétlés.* Ismert, hogy az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrixszal diagonalizálható: $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$-ban az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeihez tartozó egymásra ortogonális sajátvektorok vannak, $\mathbf{D}$ diagonális mátrix diagonálisában pedig a sajátértékek ülnek megfelelő sorrendben.

( Mellesleg azt is láttuk, hogy szimmetrikus mátrixnak minden sajátértéke valós, így annyi van neki, mint amennnyi az oszlopainak a száma.)

A fenti megjegyzés miatt igaz a következő:

$$\underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x} = \underline{x}^T (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)\underline{x} = (\mathbf{Q}^T\underline{x})^T(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q})(\mathbf{Q}^T\underline{x}) = (\mathbf{Q}^T\underline{x})^T\mathbf{D}(\mathbf{Q}^T\underline{x}) \,.$$

Így a kérdéses bázisra való áttérés mátrixát a $\mathbf{Q}^T$ adja meg, azaz az új bázisban felírt $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vektorra teljesül, hogy $(\mathbf{Q}^T\underline{x})^T\mathbf{D}(\mathbf{Q}^T\underline{x}) = \underline{y}^T\mathbf{D}\underline{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$.
Tehát ezek alapján a feladat célja a $\mathbf{Q}$ mátrix meghatározása.

2. Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomjának felírása, majd ebből a sajátértékeinek a meghatározása:

   $$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 5 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda)^3 - 25(-1-1\lambda) =$$

$$= (\lambda + 1)\left(-\lambda^2 - 2\lambda + 24\right) .$$

Ennek gyökei a sajátértékek: $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 4$ $\lambda_3 = -6$.

3. A sajátvektorok meghatározása:

   (a) A $\lambda_1 = -1$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_1$:

   $$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{11} \\ -s_{12} \\ -s_{13} \end{bmatrix} .$$

   Amit megoldva kapjuk, hogy $s_{11} = 0$, $s_{12} = 0$, $s_{13} \in \mathbb{R}$. Azaz egy egyszerűen kezelhető sajátvektor pl.: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (b) A $\lambda_2 = 4$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_2$:

   $$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s_{21} \\ 4s_{22} \\ 4s_{23} \end{bmatrix} .$$

   Az egyeneletrendszert megoldva: $s_{21} = s_{22} \in \mathbb{R}$ és $s_{23} = 0$. Így egy sajátvektor lesz $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) A $\lambda_2 = -6$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_3$:

   $$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s_{31} \\ -6s_{32} \\ -6s_{33} \end{bmatrix} .$$

   Szintén megoldva az egyenletrendszert $-s_{31} = s_{32} \in \mathbb{R}$ és $s_{23} = 0$ kapjuk. Így egy megfelelő sajátvektor lesz $\underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. $\mathbf{Q}$ meghatározása (a sajátvektorok egyre normálása) :

$$\mathbf{Q} = [\frac{1}{|\underline{s}_1|}\underline{s}_1 \ \frac{1}{|\underline{s}_2|}\underline{s}_2 \ \frac{1}{|\underline{s}_3|}\underline{s}_3] = [1 \cdot \underline{s}_1 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{s}_2 \ \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{s}_3] = = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

**2.) Feladat:** Transzformáljuk négyzetösszegé a következő kvadratikus alakot

$$\mathbf{Q}(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = 6x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_3^2 .$$

**Megoldás:** Az előző feladat mintájára oldjuk meg.

1. Az $\mathbf{A}$ mátrix meghatározása
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. A karakterisztikus polinom és a sajátértékek:
$$\chi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 12\lambda + 32\right).$$
A gyököket meghatározva azt kapjuk, hogy a 4 kétszeres sajátérték: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 4$.

3. (a) A $\lambda_1 = 8$-hez tartozó sajátvektor $\underline{s}_1$:
$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8s_{11} \\ 8s_{12} \\ 8s_{13} \end{bmatrix}.$$
Amit megoldva kapjuk, hogy $s_{12} = 0$, $-s_{11} = s_{13} \in \mathbb{R}$. Azaz egy egyszerűen kezelhető sajátvektor pl.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (b) A $\lambda_2 = 4$-hez tartozó $\underline{x}$ sajátvektorokra teljesülnie kell a következő egyenlőségnek a sajátvektor definiciója alapján: :
$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \end{bmatrix}.$$
Az egyeneletrendszert megoldva: $x_1 = x_3 \in \mathbb{R}$ és $x_2 \in \mathbb{R}$. Tehát a 4 sajátértékhez tartozó sajátvektorok egy síkot alkotnak. (ld. Megjegyzések!)

   A $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix meghatározásához keressünk egy ortogonális bázisát ennek az síknak. Ezt a *Schmidt-féle ortoganalizációs eljárással* tesszük meg.

   Induljunk ki a sík egy tetszőlegesen választott bázisából. Pl.:
$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Alkalmazva az eljárást: $\underline{b}_1 := \underline{a}_1$, és $\underline{b}_2 := \underline{b}_1 + c\underline{a}_2$. $c$ meghatározására megoldjuk a
$$\underline{b}_1 \perp \underline{b}_2 \Leftrightarrow \underline{b}_1 \cdot \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \end{bmatrix} \right) = 2 + (c+c) = 0$$

egyenletet, amiből következik, hogy $c = -1$, Így $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Összefoglalva, egy (ortogonális) sajátvektor-rendszer lehet pl.:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Lenormálva a vektorok hosszával kapjuk a kérdéses mátrixot:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Megjegyzések**

1. Vegyük észre, hogy $\underline{x}$ és $\underline{y}$ skalárszorzatára: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y} = \underline{y}^T \underline{x}$.

2. Szimmetrikus mátrix esetén különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek egymásra.
   *Bizonyítás*: Legyen $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok. Ekkor felhasználva a fenti 1. megjegytést:

$$\lambda_1 \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2 = \lambda_1 \underline{s}_1^T \underline{s}_2 = (\mathbf{A}\underline{s}_1)^T \underline{s}_2 = \underline{s}_1^T \mathbf{A}^T \underline{s}_2 = \underline{s}_1^T \mathbf{A} \underline{s}_2 = \underline{s}_1^T \lambda_2 \underline{s}_2 = \lambda_2 \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2 ,$$

   azaz ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2 = 0$, vagyis merőlegesek.

3. Ha több lineárisan független sajátvektor tartozik egy sajátértékhez, ahogyan a 2. feladatban is, akkor látható, hogy hogy ezen vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is sajátvektor. Másszóval ha $\underline{u}, \underline{v}$ $\lambda$-hoz tartozó sajátvektorok, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra: $\mathbf{A}(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = \mathbf{A}(\alpha\underline{u}) + \mathbf{A}(\beta\underline{v}) = \alpha\lambda\underline{u} + \beta\lambda\underline{v} = \lambda(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v})$. Ebből látható, hogy az egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineáris alteret alkotnak, melynek neve *sajátaltér*.

4. A legjobb megértés céljából oldjuk meg a következő feladatot**:
   Készítsünk olyan nem négyzetösszeg háromdimenziós kvadratikus alakot, melyet ha négyzetösszeggé transzformálunk, akkor egy együttható pontosan kétszer szerepel.

**3. Feladat** A négydimenziós térben adott egy $\mathcal{L}$ altér. Az $\mathcal{L}$-et a következő három vektor generálja:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Keressünk olyan vektort, mely az altér minden elemére merőleges.
2. Adjunk meg egy ortogonális bázist az $\mathcal{L}$ vektortérben. (Schmidt-eljárás)
3. Határozzuk meg azt az alteret, amelynek minden vektora merőleges az elsőként megadott vektorra.

**4. Feladat** Transzformáljuk négyzetösszegé a következő kvadratikus alakot:

$$\mathbf{Q}\left((x, y, z,)^T\right) = 2x^2 + 6y^2 + 3yz + 2z^2 \ .$$