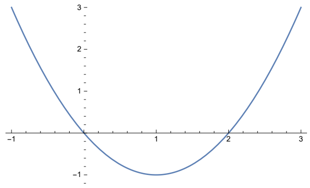
1. Oldjuk meg az
$$y' = y(y-2)$$
autonóm egyenletet.

Megoldás. Az egyenletnél $f(y) = y(y-2)$, az $f(y) = 0$ egyenletnek két megoldása van, $y = 0$ és $y = 2$. Az $y \equiv 0$ és $y \equiv 2$ egyensúlyi helyzetei az eredeti egyenletnek.



- Ha $y < 0$, akkor $f(y) > 0$, így ilyenkor az y megoldás növő.
- Ha $0 < y < 2$, akkor $f(y) < 0$, így ilyenkor a megoldás csökkenő.
- Ha $y > 2$, akkor $f(y) > 0$, így ilyenkor a megoldás növő.

Ez alapján az $y = 0$ egyensúlyi helyzet stabil, az $y = 2$ instabil.

A konkrét megoldás:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{y(y-2)}y' &= 1 & \int \frac{1}{y(y-2)}\mathrm{d}y &= x + C \\
\frac{1}{2}\int \frac{1}{y} - \frac{1}{y-2}\mathrm{d}y &= x + C & \frac{1}{2}\ln|y-2| - \ln|y| &= x + C \\
\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| &= x + C & \frac{y-2}{y} &= Ce^{2x} \\
1 - \frac{2}{y} &= Ce^{2x} & y &= \frac{2}{1+Ce^{2x}}.
\end{aligned}$$

Ha $y(0) = y_0$, akkor $C = 2/y_0 - 1$; C értéke és a megoldás viselkedése y_0-tól függően:

- Ha $y_0 < 0$, akkor $C < -1$, és a megoldás monoton növekedve tart 0-hoz;
- Ha $y_0 = 0$, akkor a megoldás konstans 0;
- Ha $y_0 \in (0, 2)$, akkor $C > 0$, és a megoldás monoton csökkenve tart 0-hoz;
- Ha $y_0 = 2$, akkor a megoldás konstans 2;
- Ha $y_0 > 2$, akkor $0 < C < -1$, és a megoldás monoton növekedve tart $+\infty$-hez.

A megoldások grafikonon: