A3 mintazh 1. zh-hoz
2017. tavasz
A csoport

1. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'x + y^2(x^2+1) = 0.$$

Megoldás. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, rendezve

$$\frac{y'}{y^2} = x + \frac{1}{x},$$

integrálás és rendezés után az általános megoldás

$$y = \frac{2}{C + x^2 + 2\log(x)}.$$

2. Adjuk meg a következő kezdeti érték feladat megoldását:

$$xy' = 3y + x \qquad y(1) = 1.$$

Ez egy lineáris elsőrendű differenciálegyenlet, a szokásos alakba rendezve

$$y' - y \cdot \frac{3}{x} = 1,$$

azaz a megoldóképletben $p(x) = -\frac{3}{x}$ és $q(x) = 1$. A homogén egyenlet ($y' - y \cdot \frac{3}{x} = 0$), majd az alapján az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{\mathrm{h}} = Cx^3, \qquad y_{\mathrm{iá}} = Cx^3 - \frac{x}{2}.$$

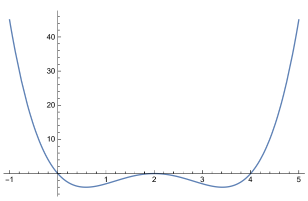
A kezdeti érték feltétel alapján $C - \frac{1}{2} = 1$, így $C = \frac{3}{2}$, és a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = \frac{3x^3}{2} - \frac{x}{2}.$$

3. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet által leírt autonóm rendszer egyensúlyi megoldásait, azok stabilitását, és vázoljunk néhány megoldást.

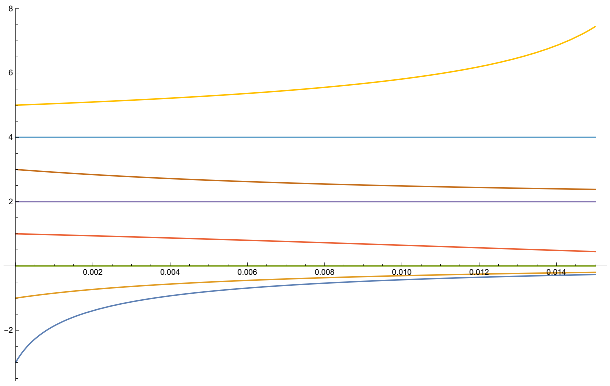
$$y' = (y-2)^2 y(y-4).$$

Megoldás. Három egyensúlyi helyzet van, az $f(y) = (y-2)^2 y(y-4)$ egyenlet három gyöke: 0, 2 és 4.



- $f(y)$ pozitív, ha $y < 0$, így $y(0) < 0$ esetén a megoldás nő és 0-hoz tart,
- $f(y)$ negatív, ha $0 < y < 2$, így $0 < y(0) < 2$ esetén a megoldás csökken és 0-hoz tart,
- $f(y)$ negatív, ha $2 < y < 4$, így $2 < y(0) < 4$ esetén a megoldás csökken és 2-höz tart,
- $f(y)$ pozitív, ha $4 < y$, így $4 < y(0)$ esetén a megoldás nő és ∞-hez tart.

Ez alapján 0 stabil, 2 félig stabil, 4 instabil egyensúlyi helyzet. Az egyenlet néhány megoldása vázolva:



4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + 4y' + 4y = \sin 3x.$$

Megoldás. Másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet. A homogén rész általános megoldása

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

(belső rezonancia van), a próbafüggvény $A \sin(3x) + B \cos(3x)$ alakú, A és B értékét az egyenletbe behelyettesítve számoljuk ki. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{\text{iá}} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - \frac{5}{169} \sin(3x) - \frac{12}{169} \sin(3x).$$

5. A következő differenciálegyenletnek $y = 1/x$ az egyik megoldása. Adjuk meg az általános megoldását.

$$x^2 y'' - 3xy' + y = 0.$$

Megoldás.

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{\log(x)}{x}.$$

B csoport

1. Adjuk meg az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$y' + xy + x^3 = 0, \qquad y(0) = 3.$$

Megoldás. Elsőrendű lineáris diffegyenlet.

$$y = Ce^{-x^2/2} + 2 - x^2.$$

2. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(2x + y\cos(xy)) + x\cos(xy)y' = 0.$$

Megoldás. Egzakt differenciálegyenlet,

$$\sin(xy) + x^2 = C, \qquad y = \frac{\arcsin(C - x^2)}{x}.$$

3. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet által leírt autonóm rendszer egyensúlyi megoldásait, azok stabilitását, és vázoljunk néhány megoldást.

$$y' = (y + 2)(1 - e^y).$$

Megoldás. Két egyensúlyi helyzet van, az $f(y) = (y+2)(1-e^y)$ egyenlet két gyöke: -2 és 0.

- $f(y)$ negatív, ha $y < -2$, így $y(0) < 0$ esetén a megoldás csökken és $-\infty$-hez tart,
- $f(y)$ pozitív, ha $-2 < y < 0$, így $-2 < y(0) < 0$ esetén a megoldás nő és 0-hoz tart,
- $f(y)$ negatív, ha $0 < y$, így $0 < y(0)$ esetén a megoldás csökken és 0-hoz tart.

Ez alapján 0 stabil, -2 instabil egyensúlyi helyzet.

4. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 5.$$

Megoldás. A homogén egyenlet általános megoldása

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x},$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^{2x}$$

(rezonancia van), a kezdeti érték alapján pedig

$$y = 2e^x + e^{2x} + xe^{2x}.$$

5. Adjuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását.

$$y'' - e^x y' = 0.$$

Megoldás. Nincs az egyenletben y, csak y' és y'', így $z = y'$ helyettesítéssel

$$z' - e^x z = 0,$$

ami egy szeparábilis egyenlet z-re, az általános megoldása

$$z = C_1 e^{e^x},$$

az eredeti egyenleté pedig

$$z = C_1 \int e^{e^x} \mathrm{d}x + C_2.$$

(Az integrál nem végezhető el expliciten - bocs.)