Matematika A4
I. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2009. február 13.

1. Kombinatorikus leszámolások

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \dots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyi féleképpen tehetjük meg

2. Érméket dobálunk, eseteket számolunk

Az alábbi feladatok közül az első néhányban egy szabályos érmét dobunk fel újra meg újra. Amikor fejet dobunk, akkor egy F betűt írunk, amikor írást, akkor pedig egy I betűt. Így minden dobássorozatból egy olyan betűsorozat adódik, ami F és I betűkből áll.

1. Háromszor dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy 3 betűből álló sorozat adódik.

   Hány ilyen sorozat létezik?
   Adja meg az összes olyan betűsorozatot, ami így kiadódhat!
   Hány olyan sorozat van, amiben nincs F betű?
   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az előző betű mind I?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan egy F szerepel?

2. Tízszer dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy 10 betűből álló betűsorozat adódik.

   Hány ilyen sorozat létezik?
   Ha a sorozatokat az ABC szabályai szerint rendezzük, akkor a felsorolásban mi az első-, illetve az utolsó öt sorozat? Ezeket adja meg!
   Hány olyan sorozat van, amiben nincs nincs F betű?
   hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?

hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?
Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az előző betű mind I?
Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan egy F szerepel?
Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan két F szerepel?
Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan három F szerepel?

3. n-szer dobunk egy érmével. A dobássorozatból egy n hosszúságú betűsorozat adódik.

   Hány ilyen sorozat létezik?
   Hány olyan sorozat van, amiben nincs nincs F betű?
   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan k darab F betű szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, de az összes előző betű mind I?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó betű F, és az előző betűk között pontosan k darab F szerepel?

3. Dobókockát dobálunk, eseteket számolunk

Négyszer dobunk egy szabályos dobókockával. A dobássorozatból egy 4 hosszúságú számsorozat adódik.

1. Hány ilyen sorozat létezik?
   Ha a sorozatokat négyjegyű számoknak tekintjük, és ennek megfelelően növekvő sorrendben soroljuk fel őket, akkor a felsorolásban mi az első-, illetve az utolsó tíz sorozat? Ezeket adja meg!

2. Képzeljük el, hogy a dobókockán a 6-os szám piros színű, a többi szám kék színű.

   Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?
   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan négy piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?
   Képzeljük el, hogy a dobókockán az 5-ös és a 6-os szám piros színű, a többi szám kék színű. Hány olyan sorozat van, amiben nincs piros szám?
   Hány olyan sorozat van, amiben egyetlen piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan két piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben pontosan három piros szám szerepel?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között egyetlen piros sincs?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan egy piros van?
   Hány olyan sorozat van, amiben az utolsó szám piros, és az előző számok között pontosan két piros van?

4. Vegyes feladatok esetszámlálásra

1. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

2. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
3. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
4. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet 1 fajtából többet is venni?
5. Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
6. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár és 3 titkárnő jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
7. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

5. Vegyes feladatok valószínűségek számolásához

1. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?
2. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy van köztük fej?
3. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 4 véletlenszerűen választott ember között van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik?

6. Feladatok RND-hez

1. Határozza meg az alábbi X valószínűségi változok eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletet (ahol RND - számítógép által generált - egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent 0 és 1 között):

   a) $X = 3RND$
   b) $X = 1 - RND$
   c) $X = (-3)RND$
   d) $X = 3RND + 7$
   e) $X = cRND + d$
   f) $X = cRND^n + d$
   g) $X = 2\pi RND$
   h) $X = \sin(2\pi RND)$

2. Határozza meg az alábbi valószínűségi változok eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND_1 és RND_2 - számítógép által generált - független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelentenek 0 és 1 között):

   a) $X = RND_1 + RND_2$
   b) $X = 2RND_1 + 3RND_2$
   c) $X = 3RND_1 - 2RND_2$
   d) $X = RND_1 * RND_2$
   e) $X = RND_1/RND_2$

3. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$-ed részén van?

4. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?

5. Legyen X egy egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon.

   a) $F(x) = \mathbb{P}(X < x) =?$

   b) $\frac{\mathbb{P}(x_1 < X < x_2)}{x_2 - x_1} =?$