6. gyakorlat, néhány megoldás

Matematika A4
Vetier András kurzusa

2009. tavasz

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

2. Exponenciális eloszlás

3. Feladatok

5. Határozza meg az alábbi X valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND - számítógép által generált - egyenletes eloszlású valószínűségi változót jelent 0 és 1 között):

   a) $X = 3RND$
   b) $X = 1 - RND$
   c) $X = (-3)RND$
   d) $X = 3RND + 7$
   e) $X = cRND + d$
   f) $X = cRND^n + d$
   g) $X = 2\pi RND$
   h) $X = \sin(2\pi RND)$

Megoldás:

a) $F(x) = \mathbb{P}(3RND < x) = \mathbb{P}(RND < x/3) = x/3$, ha $0 < x < 3$.
$F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x \geq 3$.

b) $F(x) = \mathbb{P}(1 - RND < x) = \mathbb{P}(RND > 1 - x) = 1 - \mathbb{P}(RND < 1 - x) = 1 - (1 - x) = x$, ha $0 < x < 1$.
$F(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $F(x) = 1$, ha $x \geq 1$. (Jelentése: ha RND egyenletes $[0, 1]$-en, akkor $1 - RND$ is. És tényleg, csak „meg van fordítva”.)

c) $F(x) = \mathbb{P}(-3RND < x) = \mathbb{P}(RND > -x/3) = 1 - \mathbb{P}(RND < -x/3) = 1 - (-x/3) = 1 + x/3$, ha $-3 < x < 0$ (ugyanis $(-x/3)$-nak kell 0 és 1 közé esnie).
$F(x) = 0$, ha $x \leq -3$ és $F(x) = 1$, ha $x \geq 0$.

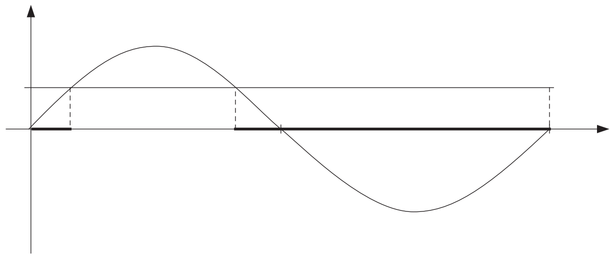
d) $F(x) = \mathbb{P}(3RND+7 < x) = \mathbb{P}(RND < (x-7)/3) = (x-7)/3$, ha $7 < x < 10$ (ugyanis $(x-7)/3$-nak 0 és 1 közé kell esnie).
$F(x) = 0$, ha $x \leq 7$ és $F(x) = 1$, ha $x \geq 10$.

e) $F(x) = \mathbb{P}(cRND + d < x)$; ha $c > 0$, akkor ez olyan, mint az előző, és $F(x) = (x - d)/c$, ha $d < x < c + d$, egyébként a szokásos; ha viszont $c < 0$, akkor $F(x) = \mathbb{P}(cRND + d < x) = \mathbb{P}(RND > (x - d)/c) = 1 - \mathbb{P}(RND < (x - d)/c) = 1 - (x - d)/c$, ha $c + d < x < d$, amúgy a szokásos. Ha $c = 0$, akkor $\mathbb{P}(X = d) = 1$, X determinisztikus.

f) Ha $c > 0$ és n páratlan, akkor $F(x) = \sqrt[n]{(x - d)/c}$, ha $d < x < c^n + d$, amúgy a szokásos.
Ha $c < 0$ és n páratlan, akkor $F(x) = 1 - \sqrt[n]{(x - d)/c}$, ha $c^n + d < x < d$, amúgy a szokásos.
Ha n páros, akkor x^n nem egy-egyértelmű (vagy másképp mondva nem bijektív), ezt még nem kell tudni kezelni, de akkor az előző nem működik teljesen. Majd tanuljuk, itt most megspórolom a magyarázatot (bocs), de a (h)-ban leírom, mi történik, az alapján ez is kitalálható.

g) Eddigiekhez képest nem hoz újat.

h) $F(x) = \mathbb{P}(\sin(2\pi RND) < x)$. Itt óvatosnak kell lenni. Az $y \to \sin(2\pi y)$ függvény $[0, 1] \to [-1, 1]$-be képez, viszont nem egy-egyértelmű. Például $\sin(2\pi RND) < 0,5$ lehet úgy is, hogy $0 < RND < \pi/6$, meg úgy is, hogy $5\pi/6 < RND \leq 2\pi$ (ábra). Ennek a valószínűsége $\frac{\pi/6+7\pi/6}{2\pi} = \frac{2}{3}$.



Általában pedig: ha $-1 < x < 0$, akkor csak egy ilyen szakasz van, $(\pi - \arcsin x)$-től $(2\pi + \arcsin x)$-ig, tehát $F(x) = \frac{\pi - 2 \arcsin x}{2\pi}$.
Ha $1 > x > 0$, akkor két szakasz van, 0-tól $\arcsin x$-ig és $(\pi - \arcsin x)$-től 2π-ig, így $F(x) = \frac{\pi + 2 \arcsin x}{2\pi}$.
Végül persze ha $x < -1$, akkor $F(x) = 0$ és ha $x > 1$, akkor $F(x) = 1$.

6. Határozza meg az alábbi valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényének képletét (ahol RND_1 és RND_2 - számítógép által generált - független, egyenletes eloszlású valószínűségi változókat jelentenek 0 és 1 között):

a) $X = RND_1 + RND_2$

b) $X = 2RND_1 + 3RND_2$

c) $X = 3RND_1 - 2RND_2$

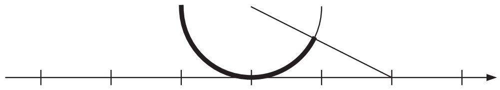
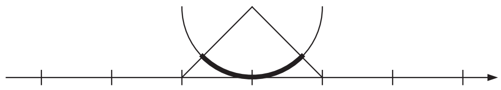
d) $X = RND_1 \cdot RND_2$

e) $X = RND_1/RND_2$

Megoldás:
Négyzeten kell dolgozni, az első 3 egyenes által levágott területre kérdez, a (d) a $z \to x/z$ grafikonja alatti rész, az utolsó szintén egyenes.

14. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a $(-\infty, 2)$ intervallumba esik? És annak a valószínűsége, hogy a $(-1, 1)$ intervallumba esik? *(Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás.)*

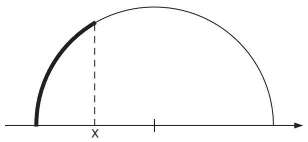
Megoldás:

Ha a megvastagított ívhez tartozó szög α, akkor a lenti számegyenesen lévő pont $\tan(\alpha-\pi/2)$, hiszen a kör (függőleges) sugara 1. A köríven egyenletesen választunk, így a szöget πRND adja meg. $F(x) = \mathbb{P}(\tan(\pi RND - \pi/2) < x)$, és innen az eloszlásfüggvény $F(x) = \frac{\pi/2+\arctan x}{\pi} = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}$.

15. Egyenletesen választunk egy pontot az egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott pont a $(-0.5, 0.5)$ intervallumba esik? Mi annak a valószínűsége, hogy kisebb, mint 0? És, hogy kisebb, mint $\frac{\sqrt{3}}{2}$? *(Az így kapott eloszlás az arcus sinus-eloszlás.)*

Megoldás:



A köríven a szöget ismét $\pi RND - \pi/2$ adja meg, és $F(x) = \mathbb{P}(\sin(\pi RND - \pi/2) < x) = \frac{1}{2} + \frac{\arcsin x}{\pi}$, ha $-1 < x < 1$, a szokásos amúgy.