Matematika A4
Néhány megoldás
2009. tavasz

6\. 8. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlás szerint és egymástól függetlenül kijelölünk 2 pontot. Mi a nagyság szerinti

(a) nagyobbik,

(b) kisebbik

eloszlás- és sűrűségfüggvénye, illetve várható értéke?

Megoldás.

(a) Legyen RND_1 és RND_2 a 2 pont, és $X = \max(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2)$. Ekkor X eloszlásfüggvénye:

$$\mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(\max(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2) \le x) = \mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 \le x \text{ és } \mathrm{RND}_2 \le x) =$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 \le x) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{RND}_2 \le x) = x^2,$$

ha $0 < x \le 1$. (Továbbá $F(x) = 0$, ha $x \le 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$.)
A sűrűségfüggvénye $f(x) = F'(x) = 2x$ a $[0,1]$ intervallumon, 0 egyébként.
A várható értéke:

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x \cdot 2x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

(b) Legyen $Y = \min(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(\min(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2) \le x) = \mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 \le x \text{ vagy } \mathrm{RND}_2 \le x) =$$

$$= \mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 \le x, \mathrm{RND}_2 \le x) + \mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 \le x, \mathrm{RND}_2 > x) + \mathbb{P}(\mathrm{RND}_1 > x, \mathrm{RND}_2 \le x) =$$

$$x^2 + x(1-x) + (1-x)x = 2x - x^2,$$

ha $0 < x \le 1$. (Továbbá $F(x) = 0$, ha $x \le 0$ és $F(x) = 1$, ha $x > 1$.)
A sűrűségfüggvénye $f(x) = F'(x) = 2 - 2x$ a $[0,1]$ intervallumon, 0 egyébként.
A várható értéke:

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 x \cdot (2-2x) \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3}.$$

6\. 9. A feladat ugyanez 8 ponttal, a kérdések a legnagyobb, negyedik legkisebb, hetedik legkisebb és legkisebb pont eloszlásfüggvénye. Megoldás.

(a) A legnagyobb eloszlásfüggvénye az előbbihez teljesen hasonló, csak most $F(x) = x^8$.

(b) Na ez érdekesebb. Legyen X a negyedik legkisebb pont. $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$, ezt akarjuk kiszámolni. Az az esemény, hogy $\{X \le x\}$, azaz hogy a negyedik legkisebb pont legfeljebb x, ugyanaz, mint az, hogy a pontok közül legalább négy esik a $[0,x]$ intervallumba.

$$\mathbb{P}(\text{pontosan } k \text{ pont esik a } [0,x] \text{ intervallumba}) = \binom{8}{k} x^k (1-x)^{8-k},$$

mert $\binom{8}{k}$ lehetőség van arra, hogy melyik legyen az a k pont, és a maradék $(8-k)$-nak az $[x,1]$ intervallumba kell esnie. Innen

$$F(x) = \mathbb{P}(\text{legalább 4 pont esik a } [0,x] \text{ intervallumba}) = \sum_{k=4}^{8} \binom{8}{k} x^k (1-x)^{8-k}.$$

Ez egyébként a Béta(4,5) eloszlás, melynek a sűrűségfüggvénye egyszerűbb alakú (erre a konkrét példára kézzel is ellenőrizető, hogy $F'(x)$ az alábbi függvény):

$$f(x) = \frac{8!}{3!4!} x^3 (1-x)^4.$$

7. 2. A 6. 8. feladatban kiszámoltuk a sűrűségfüggvényeket és a várható értéket; még a szórást kell. Ehhez

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{D}X = \sqrt{\mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \approx 0,236.$$