Mat A4 (Valószínűségszámítás) 1. zh pótzh-ja, 2009. május 20., 9:00; munkaidő: 45 perc

1. Van két kockám, mindkettőn az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok állnak. Az egyik szabályos (minden oldalára $1/6$ valószínűséggel esik), de a másik cinkelt: a 6-os valószínűsége $1/2$, a többi szám valószínűsége $1/10 - 1/10$. Találomra kiválasztom az egyiket (50-50 % eséllyel), és 5-ször dobok vele, anélkül, hogy tudnám, melyik kockát használom.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3-szor dobok hatost?
   b) Mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy a szabályos kockát választottam, feltéve, hogy pontosan 3-szor dobok hatost?

   Megoldás. a) A szabályos kockával dobálva a hatosok száma 5 dobásból $BIN(5, 1/6)$ eloszlású, míg a cinkelt kockával dobálva $BIN(5, 1/2)$ eloszlású (1-1 pont, elég a jó képlet is). Így egy találomra kiválasztott kockával dobálva a teljes valószínűség tételével (2 pont):

$$\mathbb{P}(\text{3-szor dobok hatost}) = \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad \text{(jó eredmény 2 pont)}$$

   b)

$$\mathbb{P}(\text{a szabályosat választottam} \mid \text{3-szor dobok hatost}) =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\text{a szabályosat választottam és 3-szor dobok hatost})}{\mathbb{P}(\text{3-szor dobok hatost})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2}. \quad \text{(4 pont, ha a számlálóból az 1/2 kimarad: -2 pont)}$$

2. Gyakran megyek nagyszüleimhez, akik a Cserehátban, egy kis faluban laknak. Hazafelé stoppal szoktam jönni. Mindig számolom, hogy hány autó megy el, mielőtt engem felvesz valaki. Jelölje ezt a számot X. Az a tapasztalatom, hogy kb. háromszor olyan valószínű az, hogy ez a szám 3, mint az, hogy csak 1. (Feltételezzük, hogy az elhaladó autók ugyanolyan valószínűséggel vesznek fel, egymástól függetlenül.)
   a) Adja meg X eloszlásának nevét, képletét és a parméter(ek) numerikus értékét!
   b) Mi a valószínusége annak, hogy X értéke páros szám?

   Megoldás:

   A feladatban a paraméter kiszámolásához szükséges képlet rosszul volt megadva. Aki nem jött rá, hogy nincs olyan p érték, amely 0 és 1 közötti, és megoldaná az egyenletet, akkor az illető megoldása még 9 pontot érhetett.

   X jelöli, hogy hány autó ment el. X eloszlása (pesszimista) geometriai eloszlás **(1 pont)**. Képlettel:

$$\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^k p \quad \textbf{(2 pont)}$$

   ha

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(1 pont)}$$

   A paraméter meghatározásához az egyenlet:

$$(1 - p)^3 p = 3 \cdot (1 - p)p \quad \textbf{(2 pont)}$$

   amelynek nincs $p \in (0, 1)$ megoldása **(1 pont)**.

$$\mathbf{P}(X \text{ páros}) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^{2k} p \quad \textbf{(3 pont)}$$

   amennyiben nem jó a határ, úgy csak 2 pont.

3. Jancsi és Juliska szappanbuborék eregetés közben eltéved az erdőben és rátalál a gonosz banya mézeskalács házára. A banya kihívja őket buborék eregető párbajra. A buborékok élettartama exponenciális eloszlású-nak tekinthető. A gyerekek buborékainak harmada több mint 5 másodpercig nem pukkan ki. A banya azon buborékainak, amelyek legalább 2 másodpercet megéltek, általában a negyede éli meg a 7 másodpercet.
a) Határozza meg a gyerekek buborékainak várható élettartamát.
b) Feltéve, hogy a banya egy buboréka nem éli meg az 5 másodpercet, mi a valószínűsége annak, hogy legalább 2 másodpercet él?

Megoldás.

a) (5 pont) A gyerekek egy buborékának élettartamát jelölje X.

$$\mathbf{P}(X \geq 5) = \frac{1}{3} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$1 - \mathbf{P}(X \leq 5) = \frac{1}{3} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$1 - (1 - e^{-\lambda 5}) = \frac{1}{3} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$e^{-\lambda 5} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad -\lambda 5 = \ln\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{5}\ln 3 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 5\frac{1}{\ln 3} \qquad \text{(1 pont)}$$

b) (5 pont) A banya egy buborékának éllettartamát jelölje Y.

$$\mathbf{P}(Y \geq 7 | Y \geq 2) = \frac{1}{4} \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathbf{P}(Y \geq 7 \text{ és } Y \geq 2)}{\mathbf{P}(Y \geq 2)} = \frac{\mathbf{P}(Y \geq 7)}{\mathbf{P}(Y \geq 2)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda 7})}{1 - (1 - e^{-\lambda 2})} = e^{-\lambda 5} = \mathbf{P}(Y \geq 5)$$

A számolás elvégzése, vagy helyes hivatkozás az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságára 2 pont.

A paraméter értékére itt nem jár pont, mert a ugyanazt a műveletet kellett elvégezni, mint az első feladatban. Az első pontban látottak alapján $\lambda = \frac{1}{5}\ln 4$.

$$\mathbf{P}(Y \geq 2 | Y \leq 5) \overset{\text{(1 pont)}}{=} \frac{\mathbf{P}(Y \geq 2 \text{ és } Y \leq 5)}{\mathbf{P}(Y \leq 5)} \overset{\text{(1 pont)}}{=} \frac{1 - e^{-5\frac{1}{5}\ln 4} - (1 - e^{-2\frac{1}{5}\ln 4})}{1 - e^{-5\frac{1}{5}\ln 4}}$$