Mat A4 (Valószínűségszámítás) 2. zh pótzh-ja, 2009. május 20., 10:00; munkaidő: 45 perc

1. Az X valószínűségi változó eloszlása egyenletes eloszlást követ az $[5; 10]$ intervallumon. Határozza meg az $Y = \ln(X)$ valószínűségi változó
   a) sűrűségfüggvényét,
   b) várható értékét!

X eloszlásfüggvénye

$a \in [5, 10]$ esetén $P(X < a) = (a - 5)/5$,

továbbá $a < 5$ esetén 0, és $10 < a$ esetén 1.

$\ln(X)$ eloszlásfüggvénye

$b \in [\ln(5), \ln(10)]$ esetén $P(\ln(X) < b) = P(X < e^b) = (e^b - 5)/5$

továbbá $b < \ln(5)$ esetén 0, és $\ln(10) < b$ esetén 1. **(2p)**

$\ln(X)$ sűrűségfüggvénye

$b \in [\ln(5), \ln(10)]$ esetén $e^b/5$

és másutt zérus. **(3p)**

$\ln(X)$ várható értéke

$$\int_{\ln(5)}^{\ln(10)} b \cdot (e^b/5)\ \mathrm{d}b$$

(3p)

$$\int_{\ln(5)}^{\ln(10)} \frac{b \cdot e^b}{5}\ \mathrm{d}b = \left[\frac{(b-1) \cdot e^b}{5}\right]_{\ln(5)}^{\ln(10)} = \frac{(\ln(10) - 1) \cdot 10}{5} - \frac{(\ln(5) - 1) \cdot 5}{5} = \ln(20) - 1$$

(2p)

---

2. Egy gépben két alkatrész élettartama években mérve X és Y. Együttes sűrűségfüggvényük:

$$f(x, y) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{3}x - 2y}, \quad \text{ha } x, y > 0,$$

0 egyébként. Amíg legalább az egyik alkatrész működik, addig a gép is működik.
a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gép legfeljebb 1 évig működik.
b) Mennyi XY várható értéke?

Megoldás:

Az a) és b) feladatok 5-5 pontot érnek. A sűrűségfüggvény előáll két sűrűségfüggvény szorzataként, ezért X és Y független exponenciális eloszlásúak $1/3$ és 2 paraméterekkel. Ezt felhasználva egyszerűbb volt a számolás.

a) A kérdéses valószínűség:

$$\mathbb{P}(X < 1, Y < 1) \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$\mathbb{P}(X < 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x-2y} \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[-\frac{1}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x-2y} \right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x-2} \, \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}-2} + 1 - \mathrm{e}^{-2} \quad \textbf{(4 pont)}$$

Ezt meg lehetett kapni úgy is, hogy a függetlenséget és az exponenciális eloszlás eloszlásképletét felhasználjuk:

$$\mathbb{P}(X < 1 Y < 1) = \mathbb{P}(X < 1)\mathbb{P}(Y < 1) = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})(1 - \mathrm{e}^{-2})$$

b) A függetlenséget és $\mathbb{E}(X) = 3$, $\mathbb{E}(Y) = 1/2$ képleteket felhasználva:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \textbf{(5 pont)}.$$

Ezt meg lehetett kapni úgy is, hogy az alábbi integrált kiszámoljuk:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x-2y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

amelynek a felírása 1 pontot ért, a maradék 4 pont pedig a kiszámolásra járt.

3. Egy városban 90 ezer család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét várható értéke 30 liter, szórása 20 liter.
a) Milyen eloszlást követ a családok által egy nap alatt termelt szemét térfogatnak az átlaga? (Adja meg az eloszlás nevét, és paramétere(i)nek numerikus értékét!)
b) Mekkora napi kapacitású szemétégető üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnek, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen?

Megoldás.

a) (4 pont) Sok család, egymástól függetlenül termel szemetet, a teljes mennyiséghez képest keveset. Így a centrális határeloszlás-tétel (CHT) értelmében az összeg normális eloszlású. Ennek megfelelően az átlag is.
Bármilyen módon utalás a CHT-re: (1 pont)
Csak leírni, hogy normális eloszlás: (0 pont).

A családok száma: $n = 90000$ Egy család által termelt szemét mennyisége: X

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{n\mathbb{E}(X)}{n} = \mathbb{E}(X) = 30 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$\mathbb{D}(\overline{X}) = \frac{\sqrt{n\mathbb{D}^2(X)}}{n} = \frac{\mathbb{D}(x)}{\sqrt(n)} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15} \qquad \text{(2 pont)}$$

Itt egy pont azért jár, ha a hallgató tudta, hogy a szórásnégyzetek adódnak össze szórások helyett. A másik azért, mert tudta, hogy mi történik a szórással, ha elosztjuk egy számmal.

b) (6 pont)

Y a város által termelt teljes szemétmennyiség. CHT miatt tudjuk, hogy normális eloszlású. $\mathbb{E}(Y) = n\mathbb{E}(X) = 2700000$, $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{(n)}\mathbb{D}(X) = 300 \cdot 20 = 6000$. Ennek a bekezdésnek az pontértéke (1 pont).

K a szemétégető kapacitása.

$$\mathbb{P}(Y > K) \leq 0,01 \qquad 1 - \mathbb{P}(Y < K) \leq 0,01 \qquad \mathbb{P}(Y < K) \geq 0,99$$

A fenti három alak valamelyike, vagy ezekkel ekvivalens forma (1 pont).

$$\mathbb{P}(Y < K) \geq 0,99 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \leq \frac{K - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)}\right) \geq 0,99$$

, ahol a $\mathbb{P}$ hasában, az egyenlőtlenség bal oldalán levő tag standard normális eloszlású. Standardizálás helyes formája (2 pont).

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \leq \frac{K - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)}\right) \geq 0,99 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{K - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)}\right) \geq 0,99 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{K - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \geq 2,4$$

A 0,99-et felülről becslő érték (2,4) vagy a 0,99-es értékre interpolált érték (pl:2,35): (1 pont)
A 2,3 alsó becslésre nem jár pont.

$$\frac{K - \mathbb{E}(Y)}{\mathbb{D}(Y)} \geq 2,4 \quad \Rightarrow \quad K \geq 2,4 \cdot 6000 + \mathbb{E}(Y) = 2,4 \cdot 6000 + 2700000 \quad \text{(1 pont)}$$

Legalább $K \geq 2,4 \cdot 6000 + 2700000$ méretek közül kell kiválasztani a lehetőleg a legkisebbet.