

Feladatmegoldó szeminárium 2.

1. óra

2016. 02. 15.

1. Független rendszert alkotnak-e az alábbi függvények a valós függvények vektorterében?

(a) $1, \cos^2 x, \cos(2x)$

(b) $1, \sin x, \cos x$

2. Adott a síkon 1000 pont és egy egység sugarú körvonal. Igazoljuk, hogy létezik a körvonalon olyan pont, amelynek az 1000 adott ponttól vett távolság összege legalább 1000.

3. Az f folytonos függvény a teljes számegyenesen értelmezett, és teljesül rá

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) = cx$ alkalmas c -vel. (Ez a Cauchy-függvényegyenlet.)

4.

$$\sum_{k=0}^{1008} \binom{2016}{2k} = ?$$

5. Legyenek $k \leq n$ pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k(e-1)}{n}.$$

6. Adott 13 egész szám, melyekre az igaz, hogy közülük akárhogy hagyunk el egyet, a maradék két darab hatos csoportba osztható úgy, hogy a két csoportban azonos a számok összege. Mit mondhatunk az eredeti 13 számról?

Beadandó feladatok

- Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy huszár egy 101×101 -es sakktábla bal felső mezőjéből a bal alsóba jusson? (3 pont)
- Egy országban minden városból legfeljebb 3 másik belföldi városba közlekedik repülőjárat, ugyanakkor bármely városból bármely városba eljuthatunk repülővel legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány város lehet az országban? (3 pont)
- Adjunk meg olyan 0–1-mátrixokat, amelyeknek exponenciálisan nő a determinánsa. Vagyis mutassunk minden n -re olyan $n \times n$ -es A_n mátrixot, amelynek csak 0-k és 1-esek az elemei, és $\det A_n > d \cdot c^n$ valamely $c > 1$ és $d > 0$ számokkal. (5 pont)