

Feladatmegoldó szeminárium 2.

3. óra

2016. 02. 29.

1. Egy $20m \times 20m$ -es négyzet alakú mező négy sarkában áll négy kutya, majd síp-szóra mindegyik elindul az óramutató járásának megfelelő szomszédja felé, minden pillanatban pontosan felé tartva, $1m/s$ sebességgel. Hol és mikor találkoznak a kutyák?
2. Van 8 elemünk, közülük 4 jó és 4 rossz, de nem tudjuk, melyik. Van továbbá egy walkman-ünk, amely két elemmel működik. A walkman csak akkor szólal meg, ha két jó elemet helyezünk bele. Minimum hány elempár kipróbálására van szükség, ha azt szeretnénk, hogy a walkman biztosan megszólaljon?
3. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \frac{x^2 e^x}{2n}.$$

(Segítség: használjuk az $x - x/2 \leq \ln(1+x) \leq x$ ($x \geq 0$) és az $1+x \leq e^x$ egyenlőtlenségeket.)

4. Egy repülőn 100 számozott ülőhely van. 100 utas száll fel, mindenkinek különböző számú helyre szól a jegye. Azonban az első felszálló utas elveszíti a jegyét, nem tudja, hányas székre kellene ülnie, ezért választ egyet találmra, és oda leül. Ezután minden további felszálló leül a helyére, ha az szabad, egyébként pedig választ egyet találmra a még szabad helyek közül. Ottó az utolsó felszálló. Mekkora a valószínűsége, hogy a saját helyére ül?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az A négyzetes mátrixra $A = A^2$, akkor A minden sajátértéke 0 vagy 1. Igaz-e az állítás visszafelé?
6. Fel lehet-e bontani az $f(x) = x$ függvényt két periodikus függvény összegére?

Beadandó feladatok

7.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$$

(3 pont)

8. Az f valós függvényre az $f^2, f^3, \dots$ függvények mindegyike polinom. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f is az. (3 pont)
9. Legyenek A és B idempotens $k \times k$ -as mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $(AB)^n$ mátrixsorozat konvergál, amint $n \rightarrow \infty$, és adjuk meg a határértékét. (5 pont)