

Feladatmegoldó szeminárium 2.

4. óra

2016. 03. 07.

1. Jenő gondolt 20 *egész* számra. Béla megkérdezheti tőle tetszőleges *valós* együtthatós lineáris kombináció értékét. Hány kérdésre van szüksége, hogy ki tudja találni a gondolt számokat?
2. Mennyi a folytonos valós függvények halmazának számossága?
3. Hány 0-ra végződik  $n!$  aszimptotikusan, amint  $n \rightarrow \infty$ ?
4.  $A$   $4 \times 2$ -es és  $B$   $2 \times 4$ -es mátrixok, melyekre

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg a  $BA$  mátrixot.

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely véges egyszerű gráfnak a csúcsai két részre oszthatóak úgy, hogy az éleknek legalább a fele a két rész között haladjon.
6. Legyen  $a_n$  egy valós számsorozat, és

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha  $a_n$  konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ , akkor  $b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \in \mathbb{R}$ .

Beadandó feladatok

10.

$$\sum_{k=0}^{504} \binom{2016}{4k} = ?$$

(3 pont)

11. Legyen  $a_n$  a 10-hez relatív prím számok száma 1 és  $n$  között. Mennyi  $a_n$  aszimptotikusan? (Azaz pl. határozzuk meg, milyen  $\alpha$ -ra létezik  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ , és mennyi ez a határérték.) (3 pont)
12. Legyen  $n$  természetes szám. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(5 pont)

13. Adott  $x_0 = 0$  és  $x_1 = 1$ , és  $x_{n+1} = (x_n + x_{n-1})/2$ . Mennyi az  $x_n$  sorozat határértéke? (3 pont)
14. 50 embert kell elhelyeznünk két autóbuszon. Mindenkinek pontosan 3 haragosa van a többiek között (a haragosság kölcsönös). Megoldható-e az, hogy mindenki legfeljebb egy haragosával kerüljön egy buszra? (A buszok 50 fősek.) (3 pont)
15. Léteznek-e olyan  $A$  és  $B$  természetes számokból álló végtelen halmazok, amelyekre az igaz, hogy minden természetes szám egyértelműen előáll egy  $A$ -beli és egy  $B$ -beli szám összegeként? (5 pont)