Feladatmegoldó szeminárium 2.
6. óra
2016. 03. 21.

1. Adott a síkon egy szakasz és egy vele párhuzamos egyenes. Megszerkeszthető-e a szakasz felezőpontja egyetlen vonalzó segítségével (amellyel nem lehet adott szöget rajzolni, sem távolságot mérni, csak egyenes vonalat húzni)?

2. Mi a határértéke az
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
kifejezésnek, amint $n \to \infty$?

3. 13 *valós* számra teljesül, hogy bármelyiket is hagyjuk el, a maradék két 6-os csoportra osztható úgy, hogy a két csoportban a számok összege egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy ez csak úgy lehet, hogy a 13 szám egyenlő.

4. Egy pozitív egészt teljes hatványnak nevezünk, ha előáll a^n alakban, ahol $a, n \geq 2$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy nincs négy egymást követő teljes hatvány.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden elem másodrendű, akkor a csoport kommutatív.

6. Tegyük fel, hogy $f(x)$ deriválható és $f(x) \sim x^2$ ($f(x)$ aszimptotikusan megegyezik x^2-tel), amint $x \to \infty$. Következik-e ebből, hogy $f'(x) \sim 2x$, amint $x \to \infty$?

<u>Beadandó feladatok</u>

16. Egy $n \times k$-s táblázatba pozitív számokat írtunk. Egy lépésben egy tetszőleges sorban vagy oszlopban minden számot kicserélhetünk a reciprokára. Bizonyítsuk be, hogy elérhető, hogy minden oszlopban és sorban a számok szorzata legalább 1 legyen. (3 pont)

17. Melyik az a legkisebb 4-re végződő pozitív egész szám, amelyiknél az utolsó 4-est előre mozdítva (pl. $1234 \to 4123$) pontosan 4-szer akkora számot kapunk? (3 pont)

18. Egy ejtőernyős leszáll egy 10 km sugarú, kör alakú erdő belsejében, de nem tudja, azon belül pontosan hol. Adjuk meg a lehető legrövidebb útvonalat, amit követve biztosan kijut az erdőből. (Figyelem: amíg ki nem jutott az erdőből, nem tudja, pontosan melyik pontján tartózkodik.) (5 pont)