

Feladatmegoldó szeminárium 2.

8. óra

2016. 04. 11.

1. Béla az RND gombbal választ egy véletlen számot, majd a Cos gombot nyomogatja a számológépén (ahol a szöveget radiánban méri). Mit tapasztal?
2. Legyenek a és b egész számok, és tegyük fel, hogy $x^2 + ax + b$ végtelen sok egész x -re négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.
3. Mutassuk meg, hogy a Pascal-háromszög bármely sorában a páratlan számok száma kettőhatvány. Számítsuk ki a kettő kitevőjét is.
4. Egy kaszinóban különböző kártyakeverő-gépeket használnak az 52 lapos francia kártya keveréséhez. Egy adott gép egy adott sorrendben cseréli meg a beadott teljes pakliban a kártyák sorrendjét. A kaszinó vezetősége takarékosági okokból minél kevesebb gépet akar üzemeltetni, de azért tetszőleges keverést meg kell tudniuk valósítani. Mennyi a minimális számú gép, amivel ez megoldható?

Beadandó feladatok

19. Egy 8×8 -as sakktáblán minden mező színe fekete vagy fehér. Egy lépésben egy soron vagy egy oszlopon belül az összes mező színét megváltoztathatjuk az ellenkezőjére. Elérhető-e ilyen lépésekkel a tiszta fekete állásból kiindulva a sakktábla tetszőleges színezése? (3 pont)
20. Egy hatszögnek legfeljebb hány hegyesszöge lehet a síkban? (A hatszög lehet konkáv is.) (3 pont)
21. Legyen $f_t(x) = e^{xt}$. Lássuk be, hogy az $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ lineárisan független halmaz a folytonos valós függvények vektorterében. Azaz mutassuk meg, hogy ha n pozitív egész, t_1, t_2, \dots, t_n különböző valós számok és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tetszőleges valós számok esetén

$$\lambda_1 e^{t_1 x} + \lambda_2 e^{t_2 x} + \dots + \lambda_n e^{t_n x}$$

az azonosan 0 függvény, akkor $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. (5 pont)