

Feladatmegoldó szeminárium 2.

8. óra

2016. 04. 18.

1. Akasszunk fel egy képet két szög segítségével úgy, hogy a két szög együtt megtartsa a képet, de ha bármelyik szöget húzzuk ki, a kép leesik.
2. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkőzést. Minden egyes mérkőzésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pseudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B -t, vagy van olyan C , hogy A legyőzte C -t és C legyőzte B -t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megverte mindenkit). Bizonyítsuk be, hogy mindig van legalább egy pseudogyőztes.
3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges konvergens sornál van nála aszimptotikusan nagyobb konvergens sor, vagyis ha $a_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, akkor található hozzá olyan b_n sorozat, hogy $b_n/a_n \rightarrow \infty$ és mégis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.
4. Legyenek A, B, C $n \times n$ -es mátrixok. Igazoljuk, hogy $Tr(AB) = Tr(BA)$, de általában $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$ (ahol $Tr(M)$ az M mátrix főátlóbeli elemeinek összege, "nyoma").
5. Mutassunk olyan többváltozós polinomot, amely nem veszi fel a 0-t, de felvesz a 0-hoz tetszőlegesen közeli értéket.

Beadandó feladatok

22. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkőzést. Minden egyes mérkőzésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pseudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B -t, vagy van olyan C , hogy A legyőzte C -t és C legyőzte B -t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megverte mindenkit). Igazoljuk, hogy ha van 2 pseudogyőztes, akkor van 3 is. (3 pont)
23. Tegyük fel, hogy a $p(x)$ valós polinomnak minden gyöke valós és különböző. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p'(x)$ -nek is minden gyöke valós, és p és p' gyökei felváltva követik egymást. (3 pont)
24. Mutassuk meg, hogy tetszőleges divergens sornál van nála aszimptotikusan kisebb divergens sor, vagyis ha $a_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, akkor található hozzá olyan b_n sorozat, hogy $b_n/a_n \rightarrow 0$ és mégis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$. (5 pont)