Feladatmegoldó szeminárium 2.
11. óra
2016. 05. 09.

1. Egy bábu 1-ről indul és mindig annyit lép, ahányat egy dobókockával dobunk. Mekkora valószínűséggel lép rá a 100-ra?

2. 5 rab ül egy kerek asztal körül. Mindegyikük fején van egy fekete vagy egy fehér sapka. Senki sem látja a saját sapkáját, de látja mindenki másét. Meg kell tippelniük a saját sapkájuk színét (mindenki egyszerre tippel), és ha legalább egy rab helyesen tippel, mindegyiküket szabadon engedik. Mielőtt a sapkákat rájuk adnák, előzetesen megbeszélhetnek egy stratégiát. Van-e olyan stratégia, amellyel biztosan kiszabadulnak? (Mi a helyzet, ha legalább két rabnak kell helyesen tippelnie? És ha háromnak?)

3. Adott egy 15 csúcsú összefüggő gráf. Legyen A a gráf szomszédsági mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy $(I + A)^{20}$ minden eleme pozitív. Tipp: találjunk kombinatorikai jelentést A^{20} elemeinek, majd $(I + A)^{20}$ elemeinek. (A szomszédsági mátrix (i, j) eleme 1, ha az i és j csúcsok szomszédosak, 0 egyébként.)

4. Fel lehet-e bontani az $f(x) = x$ függvényt két periodikus függvény összegére?

5. Dobunk egy piros dobókockával, majd dobunk egy kék dobókockával annyiszor, amennyi a piros kockán kijött. Határozzuk meg a kék kockán kijött számok összegének a generátorfüggvényét.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív egész számokat kiszínezzük két színnel, akkor található 3 hosszúságú számtani sorozat csupa azonos színű számból. (Sőt, próbáljunk meg minél kisebb olyan N-et mondani, hogy már 1-től N-ig a számokat színezve is teljesül az állítás.)

7. Legyen f egy másodfokú egész együtthatós polinom, amelyre igaz, hogy $5|f(x)$ minden egész x esetén. Igazoljuk, hogy f együtthatói oszthatók 5-tel.

8. (Pick-tétel) Legyen P egy rácssokszög a síkbeli négyzetrácsban: csúcsai rácspontok, oldalai a rácsra nem feltétlen illeszkedő egyenes szakaszok. Jelölje P területét t, a P határán lévő rácspontok számát (a csúcsokkal együtt) h, a belsejében lévők számát pedig i. Mutassuk meg, hogy

$$t = i + h/2 - 1.$$

9. Legyenek $x > 0$ és $x_{n,i}$ nemnegatív számok úgy, hogy minden $n \geq 1$-re $\sum_{i=1}^{n} x_{n,i} = x$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty \prod_{i=1}^{n}(1+x_{n,i})} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} x_{n,i} = 0$$

<u>Beadandó feladatok</u>

31. Színezzük ki a számokat 1-től 8-ig két színnel úgy, hogy ne legyen 3 hosszúságú számtani sorozat csupa azonos színű számokból. (3 pont)

32. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hatványok reciprokösszege véges. (3 pont)

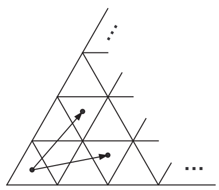
33. Legyenek $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ valós számok, és $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ egy permutáció. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \cdots + a_n b_{\pi(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

(5 pont)

34. Van-e 11 darab pozitív egészekből álló végtelen számtani sorozat, amelyek differenciái rendre a $10, 11, \dots, 20$ számok, és valahonnan kezdve lefedik az összes pozitív egészt? (3 pont)

35. Tekintsünk egy 101 kis háromszög oldalhosszúságú szabályos háromszögrácsot. A bal alsó mezőbe egy bábut állítunk. A bábu minden lépésben az oldalakkal párhuzamosan a 6 lehetséges irány közül az egyikben léphet előre három mezőt a táblán. Az ábrán a lehetséges első lépések láthatók. Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy a jobb alsó sarokba átérjen?



(3 pont)

36. Legyen p prím és f egy legfeljebb $p-1$-edfokú polinom, amelyre igaz, hogy $p | f(x)$ minden egész x esetén. Igazoljuk, hogy f együtthatói oszthatók p-vel. (5 pont)