1. Műveletek bináris vektorokkal és kommunikáció Bináris Szimmetrikus Csatornán (BSC)

Kódolástechnika

1. feladat

(a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?

(b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

1. feladat

(a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?

(b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

Megoldás.

(a) A kimenet vektor a bemenet vektor és a hiba vektor mod 2 összege:

$$\begin{array}{rr} & 0010011 \\ + & 1000001 \\ \hline & 1010010 \end{array}$$

1. feladat

(a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?

(b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

Megoldás.

(a) A kimenet vektor a bemenet vektor és a hiba vektor mod 2 összege:

$$\begin{array}{rr} & 0010011 \\ + & 1000001 \\ \hline & 1010010 \end{array}$$

(b) A hiba vektor valószínűsége

$$P(e = 1000001) = 0.1^2 \cdot (1 - 0.1)^5 \approx 0.005905.$$

2. feladat

(a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?

(b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

2. feladat

(a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?

(b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

Megoldás.

(a)

$$\begin{array}{ll} \text{bemenet:} & 0010011 \\ \text{kimenet:} & 1010010 \\ & \downarrow \qquad \downarrow \\ & 1 \ + \ 1 = 2 \end{array}$$

2. feladat

(a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?

(b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

Megoldás.

(a)

$$
\begin{array}{ll}
\text{bemenet:} & 0010011 \\
\text{kimenet:} & 1010010 \\
 & \downarrow \quad\;\; \downarrow \\
 & 1 \;+\; 1 = 2
\end{array}
$$

(b) $v = u + e \implies e = u + v$

$$
\begin{array}{ll}
\text{bemenet:} & 0010011 \\
\text{kimenet:} & 1010010 \\
\text{hiba:} & 1000001
\end{array}
$$

3. feladat

(a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?

(b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

3. feladat

(a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?

(b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

Megoldás.

(a) A hiba vektor a bemenet + kimenet mod 2:

$$e = u + v = (10000010)$$

3. feladat

(a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?

(b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

Megoldás.

(a) A hiba vektor a bemenet + kimenet mod 2:

$$e = u + v = (10000010)$$

(b)

$$P(v = (10100101) | u = (00100111)) =$$
$$P_b^2(1 - P_b)^6 = 0.01^2 \cdot 0.99^6 \approx 0.00009415.$$

4. feladat

Egy véletlen bitsorozatban minden bit független a többitől. Az 1-es valószínűsége $P_b = 0.03$, a 0 valószínűsége $1 - P_b = 0.97$.

(a) Mekkora a 01000100 sorozat valószínűsége?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 8 hosszú bitsorozatban pontosan 2 db 1-es szerepel?

(c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 8 hosszú bitsorozatban legalább 2 db 1-es szerepel?

4. feladat

Egy véletlen bitsorozatban minden bit független a többitől. Az 1-es valószínűsége $P_b = 0.03$, a 0 valószínűsége $1 - P_b = 0.97$.

(a) Mekkora a 01000100 sorozat valószínűsége?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 8 hosszú bitsorozatban pontosan 2 db 1-es szerepel?

(c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 8 hosszú bitsorozatban legalább 2 db 1-es szerepel?

Solution.

(a)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0.97 \cdot & 0.03 \cdot & 0.97 \cdot & 0.03 \cdot & 0.97 \cdot & 0.03 \cdot & 0.97 \cdot & 0.03 \end{array} = 0.03^2 \cdot 0.97^6 \approx 0.00075.$$

4. feladat

Megoldás.

(b) Azon 8 hosszú bitsorozatok száma, amelyekben pontosan 2 db 1-es van, $\binom{8}{2}$, és minden ilyen sorozatnak a valószínűsége megegyezik az (a) rész eredményével, így

$$P(\text{2 db 1-es van egy 8 hosszú sorozatban}) =$$
$$\binom{8}{2} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^6 \approx 0.0210.$$

4. feladat

Megoldás.

(b) Azon 8 hosszú bitsorozatok száma, amelyekben pontosan 2 db 1-es van, $\binom{8}{2}$, és minden ilyen sorozatnak a valószínűsége megegyezik az (a) rész eredményével, így

$$P(\text{2 db 1-es van egy 8 hosszú sorozatban}) =$$

$$\binom{8}{2} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^6 \approx 0.0210.$$

(c)

$$P(\text{legalább 2 db 1-es van egy 8 hosszú sorozatban}) =$$

$$1 - 0.97^8 - \binom{8}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^7 \approx 0.0223.$$

5. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

5. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokkon belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

5. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokkon belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

Meg kell találnunk a legkisebb t értéket, melyre

$$\sum_{i=t+1}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \leq 0.001.$$

5. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokkon belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

Meg kell találnunk a legkisebb t értéket, melyre

$$\sum_{i=t+1}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \leq 0.001.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=13}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \approx 0.00311 \\ \sum_{i=14}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \approx 0.000902 \end{array}\right\} \implies t = 13.$$

6. feladat

(a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?

(b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

6. feladat

(a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?

(b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

Megoldás.

(a)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

6. feladat

(a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?

(b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

Megoldás.

(a)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} =$$

$$1 + 5 + 10 + 10 = 26.$$

7. feladat

Számítsuk ki a következő vektor súlyát: (000100011000111101000).

7. feladat

Számítsuk ki a következő vektor súlyát: $(00010001100011110100 0)$.

Megoldás. A vektor 8 db 1-est tartalmaz, így

$$w(000100011000111101000) = 8.$$

8. feladat

Számítsuk ki a következő mátrix-vektor szorzatot mod 2 aritmetikában.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. feladat

Megoldás.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(A mátrix 2., 3. és 7. oszlopát kell elemenként összeadni.)

9. feladat

Számítsuk ki a következő mátrix-vektor szorzatot mod 2 aritmetikában.

$$(1001) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. feladat

Megoldás.

$$(1001)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(01001110).$$

(A mátrix 1. és 4. sorát kell elemenként összeadni.)