3. Bináris lineáris kódok

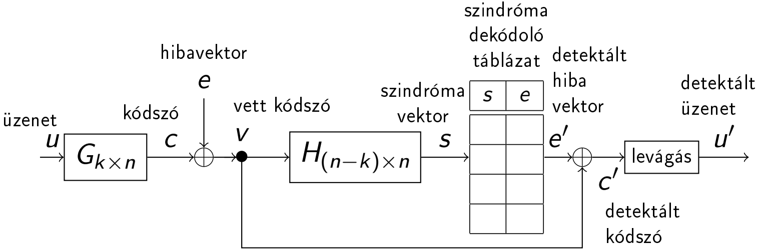
Kódolástechnika

A kódolási séma

Lineáris kódoknál $c = uG$, majd a v vett kódszóból az

$$s^T = Hv^T$$

szindrómát számítjuk ki, az alapján detektáljuk a hibát.



Végül, ha a kód szisztematikus (a kódszó eleje az üzenet), akkor elég egy levágás.

Lineáris kódok fejlesztése

Tekintsük a következő G generátormátrixot és H paritás ellenőrző mátrixot:

$$G_{2\times 5} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad H_{3\times 5} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

($GH^T = 0$ fennáll.)

G és H együtt definiál egy szisztematikus $C(5,2)$ kódot.

1. feladat - kódvektorok

Mik az előbbi kódnak a kódvektorai?

1. feladat - kódvektorok

Mik az előbbi kódnak a kódvektorai?

Megoldás.

$$c^{(0)} = u^{(0)}G = (00) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (00000)$$

$$c^{(1)} = u^{(1)}G = (01) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (01111)$$

$$c^{(2)} = u^{(2)}G = (10) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (10110)$$

$$c^{(3)} = u^{(3)}G = (11) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (11001)$$

G és H szerkezete szisztematikus kódokra

Szisztematikus kódok esetén G bal szélső négyzet alakú blokkja az egységmátrix (identitás mátrix):

$$G = \left[\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right].$$

Ezután a

$$G = \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}}_{B} \right],$$

jelöléssel H kiszámítható úgy, mint

$$H = (B^T, I_{n-k}) = \left[\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}}}_{B^T} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right].$$

Szindróma vektorok

A dekódoláshoz először az s szindróma vektort számítjuk ki a H paritás ellenőrző mátrix segítségével:

$$s^T = Hv^T.$$

Egyébként

$$s^T = Hv^T = He^T$$

mindig teljesül, vagyis a szindrómavektor csak a hibavektortól függ, az eredeti kódszótól nem.

Szindróma vektorok

A dekódoláshoz először az s szindróma vektort számítjuk ki a H paritás ellenőrző mátrix segítségével:

$$s^T = Hv^T.$$

Egyébként

$$s^T = Hv^T = He^T$$

mindig teljesül, vagyis a szindrómavektor csak a hibavektortól függ, az eredeti kódszótól nem.

A következő lépés: az s szindrómavektor alapján megpróbáljuk kitalálni az e hibavektort. Az s szindrómavektor rövidebb, mint az e hibavektor $\rightarrow$ minden egyes szindrómához többféle hibavektor is tartozik. El kell döntenünk, melyiket választjuk ki.

Szindróma vektorok

A dekódoláshoz először az s szindróma vektort számítjuk ki a H paritás ellenőrző mátrix segítségével:

$$s^T = Hv^T.$$

Egyébként

$$s^T = Hv^T = He^T$$

mindig teljesül, vagyis a szindrómavektor csak a hibavektortól függ, az eredeti kódszótól nem.

A következő lépés: az s szindrómavektor alapján megpróbáljuk kitalálni az e hibavektort. Az s szindrómavektor rövidebb, mint az e hibavektor $\rightarrow$ minden egyes szindrómához többféle hibavektor is tartozik. El kell döntenünk, melyiket választjuk ki.

Ehhez egy szindróma dekódoló táblázatot készítünk.

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

A szindróma dekódoló táblázat a következő módon kapható meg:

1. Listázzuk a $0, \ldots, 2^n - 1$ számokat.
2. Átírjuk őket bináris alakra, ezzel megkapjuk a lehetséges $e \in \{0,1\}^n$ hibavektorok listáját.
3. Kiszámítjuk a $He^T = s^T$, $\forall e \in \{0,1\}^n$ szorzatokat.
4. A szorzatokat az s értékük szerint csoportokba rendezzük (ezek a hibacsoportok).
5. Minden egyes csoportban megkeressük a minimális súlyú (legnagyobb valószínűségű) e vektort, ez lesz a csoportvezető.
6. Az összetartozó s, e párokat összegyűjtjük a szindróma dekódoló táblázatba.

A szindróma táblázat konstrukciója

1. és 2. lépés: listázzuk a lehetséges hibavektorokat.

$$
\begin{array}{lll}
0 \to e = (00000) & 11 \to e = (01011) & 22 \to e = (10110) \\
1 \to e = (00001) & 12 \to e = (01100) & 23 \to e = (10111) \\
2 \to e = (00010) & 13 \to e = (01101) & 24 \to e = (11000) \\
3 \to e = (00011) & 14 \to e = (01110) & 25 \to e = (11001) \\
4 \to e = (00100) & 15 \to e = (01111) & 26 \to e = (11010) \\
5 \to e = (00101) & 16 \to e = (10000) & 27 \to e = (11011) \\
6 \to e = (00110) & 17 \to e = (10001) & 28 \to e = (11100) \\
7 \to e = (00111) & 18 \to e = (10010) & 29 \to e = (11101) \\
8 \to e = (01000) & 19 \to e = (10011) & 30 \to e = (11110) \\
9 \to e = (01001) & 20 \to e = (10100) & 31 \to e = (11111) \\
10 \to e = (01010) & 21 \to e = (10101) &
\end{array}
$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes e vektort beszorzunk a H paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

4. és 5. lépés: a szorzatokat csoportosítjuk az értékük szerint, és kiválasztjuk a csoportvezetőket (legkisebb súlyú hibavektor az adott csoportból).

$$E_{(000)} = \{(00000), (01111), (10110), (11001)\} \to e_{(000)} = (00000)$$
$$E_{(001)} = \{(00001), (01110), (10111), (11000)\} \to e_{(001)} = (00001)$$
$$E_{(010)} = \{(00010), (01101), (10100), (11011)\} \to e_{(010)} = (00010)$$
$$E_{(011)} = \{(00011), (01100), (10101), (11010)\} \to e_{(011)} = (00011)$$
$$E_{(100)} = \{(00100), (01011), (10010), (11101)\} \to e_{(100)} = (00100)$$
$$E_{(101)} = \{(00101), (01010), (10011), (11100)\} \to e_{(101)} = (00101)$$
$$E_{(110)} = \{(00110), (01001), (10000), (11111)\} \to e_{(110)} = (10000)$$
$$E_{(111)} = \{(00111), (01000), (10001), (11110)\} \to e_{(111)} = (01000)$$

A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

6. lépés. Összeállítjuk a szindróma dekódoló táblázatot.

szindróma vektor	csoportvezető
(000)	(00000)
(001)	(00001)
(010)	(00010)
(011)	(00011)
(100)	(00100)
(101)	(00101)
(110)	(10000)
(111)	(01000)

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Bármely c kódszóra és e hibavektorra e és $e + c$ ugyanabba a hibacsoportba tartoznak, mivel $Hc^T = 0$. Ennek felhasználásával mutatunk egy másik módszert a hibacsoportok kiszámítására. Először listázzuk a kódszavakat:

$$c^{(0)} = (00000),\ c^{(1)} = (01111),\ c^{(2)} = (10110),\ c^{(3)} = (11001).$$

Ezután

1. Választunk egy e hibavektort.
2. Kiszámítjuk a megfelelő s szindróma vektort: $He^T = s^T$.
3. $E_s = \left\{ e, e + c^{(1)}, \ldots, e + c^{(2^k - 1)} \right\}$.
4. Választunk egy olyan e hibavektort, ami még nem szerepel egyik csoportban sem, és megismételjük a 2. lépéstől.

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa.

1. Kiválasztjuk $e = (00000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(000)} = & \{(00000), (00000) + (01111), \\ & (00000) + (10110), (00000) + (11001)\} = \\ & \{(00000), (01111), (10110), (11001)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00001)$-et.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(001)} = &\{(00001), (00001) + (01111), \\ &(00001) + (10110), (00001) + (11001)\} = \\ &\{{\color{red}(00001)}, (01110), (10111), (11000)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00010)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(010)} = &\{(00010), (00010) + (01111), \\ &(00010) + (10110), (00010) + (11001)\} = \\ &\{(00010), (01101), (10100), (11011)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00100)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(100)} = &\{(00100), (00100) + (01111), \\ &(00100) + (10110), (00100) + (11001)\} = \\ &\{(00100), (01011), (10010), (11101)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (01000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(111)} = &\{(01000), (01000) + (01111), \\ &(01000) + (10110), (01000) + (11001)\} = \\ &\{(01000), (00111), (11110), (10001)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (10000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(110)} = &\{(10000), (10000) + (01111), \\ &(10000) + (10110), (10000) + (11001)\} = \\ &\{(10000), (11111), (00110), (01001)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00101)$-et.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(101)} = &\{(00101), (00101) + (01111), \\ &(00101) + (10110), (00101) + (11001)\} = \\ &\{(00101), (01010), (10011), (11100)\}. \end{aligned}$$

Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00011)$-et.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(011)} = &\{(00011), (00011) + (01111), \\ &(00011) + (10110), (00011) + (11001)\} = \\ &\{{\color{red}(00011)}, (01100), (10101), (11010)\}. \end{aligned}$$

Példa. A (001) szindróma hibacsoportja

A (001) szindróma hibacsoportja az előzőek szerint

$$E_{001} = \{(00001), (01110), (10111), (11000)\}.$$

A hibacsoport tulajdonság gyors ellenőrzése:

$$e = (00001) \quad \rightarrow \quad He^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e = (01110) \quad \rightarrow \quad He^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A csoportvezető kiválasztása

Feltéve, hogy $P_b = 0.01$,

$$
\begin{array}{lccccc}
E_1 = E_{001} = \{ & (00001), & (01110), & (10111), & (11000) & \} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & w = 1 & w = 3 & w = 4 & w = 2 & \\
 & & & & & \\
 & 9.6 \cdot 10^{-3} & 9.8 \cdot 10^{-7} & 9.9 \cdot 10^{-9} & 9.7 \cdot 10^{-5} &
\end{array}
$$

A csoportvezető $e = (00001)$, mivel ennek a legnagyobb a valószínűsége (ezzel ekvivalensen ennek a legkisebb a súlya).

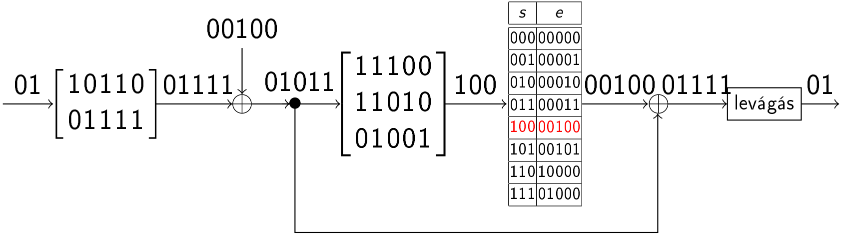
A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00100) hibavektorra.

A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00100) hibavektorra.

Megoldás.



s	e
000	00000
001	00001
010	00010
011	00011
100	00100
101	00101
110	10000
111	01000

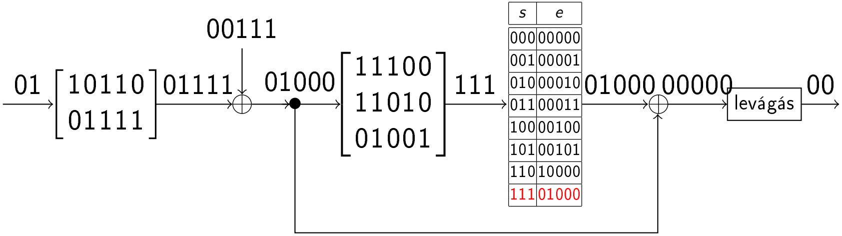
A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

Megoldás.

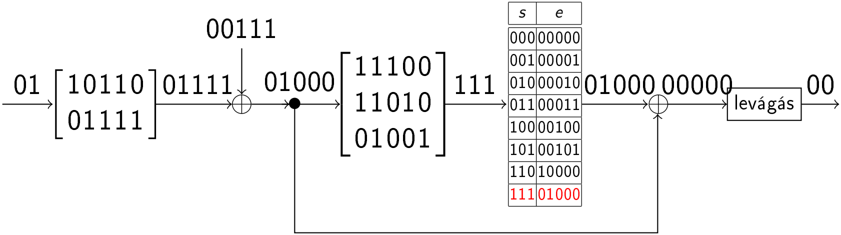


s	e
000	00000
001	00001
010	00010
011	00011
100	00100
101	00101
110	10000
111	01000

A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

Megoldás.



s	e
000	00000
001	00001
010	00010
011	00011
100	00100
101	00101
110	10000
111	01000

A (00111) hibavektor valószínűsége elég kicsi ahhoz, hogy a hibás dekódolás ne jelentsen problémát (kommunikációs QoS).

A standard táblázat

szindróma vektor	1	2	3	4
(000)	(00000)	(10110)	(11001)	(01111)
(001)	(00001)	(11000)	(01110)	(10111)
(010)	(00010)	(10100)	(01101)	(11011)
(011)	(00011)	(01100)	(10101)	(11010)
(100)	(00100)	(10010)	(01011)	(11101)
(101)	(00101)	(01010)	(10011)	(11100)
(110)	(10000)	(01001)	(00110)	(11111)
(111)	(01000)	(10001)	(00111)	(11110)

A kód $\geq t$ hibát tud javítani $\iff$ a legfeljebb t súlyú csoportvezetők egyértelműek.

Kommunikációs QoS tervezés

A következő hibavektorokat képes a kód javítani:

$$\begin{array}{cccc} (00000) & (00001) & (00010) & (00011) \\ (00100) & (00101) & (10000) & (01000) \end{array}$$

Ezek közt szerepel az összes 0 és 1 súlyú hibavektor, valamint kettő 2 súlyú hibavektor. Egyéb hibavektor esetén hibás dekódolást kapunk, így a blokk hiba valószínűség

$$P_e = \left(\binom{5}{2} - 2\right) P_b^2 (1 - P_b)^3 + \binom{5}{3} P_b^3 (1 - P_b)^2 + 5 P_b^4 (1 - P_b) + P_b^5;$$

például $P_b = 0.1$-re,

$$P_e \approx 0.0669.$$

QoS javítás

Mit nyerünk a hibajavító kód használatával?

QoS javítás

Mit nyerünk a hibajavító kód használatával?

Nézzük meg, mi történik, ha az üzeneteket kódolás nélkül küldjük át ugyanazon a csatornán. Egy 2 bit hosszú blokk esetén a hibás dekódolás valószínűsége

$$1 - (1 - P_b)^2 = 0.19,$$

míg a kód használata esetén 0.0669. (Cserébe viszont a kód ráta 2/5, azaz a kód használata a csatorna kapacitását 2/5 részére csökkenti.)

QoS javítás

Egy másik összehasonlítási lehetőség, hogy egy olyan csatornával hasonlítjuk össze, ahol 5 hosszú üzeneteket küldünk a csatornán hibajavító kód nélkül, és azt vizsgáljuk meg, hogy ezen a másik csatornán milyen P_b' bit hiba valószínűség esetén lesz a blokk hiba valószínűség pont annyi, mint az eredeti csatornán hibajavító kóddal.

QoS javítás

Egy másik összehasonlítási lehetőség, hogy egy olyan csatornával hasonlítjuk össze, ahol 5 hosszú üzeneteket küldünk a csatornán hibajavító kód nélkül, és azt vizsgáljuk meg, hogy ezen a másik csatornán milyen P_b' bit hiba valószínűség esetén lesz a blokk hiba valószínűség pont annyi, mint az eredeti csatornán hibajavító kóddal.

Ehhez teljesülnie kell, hogy

$$1 - (1 - P_b')^k = P_e = 0.0669 \quad \to \quad P_b' \approx 0.0137.$$

Vagyis a hibajavítás révén ugyanazt a blokk hiba valószínűséget el tudjuk érni egy zajosabb csatornán is ($P_b = 0.1 > 0.0137 = P_b'$).

Feladat

Egy bináris szisztematikus kódot a kódszavaival adunk meg:

$$c^{(0)} = (000000), \quad c^{(1)} = (010101),$$
$$c^{(2)} = (101010), \quad c^{(3)} = (111111).$$

(a) Mi ennek a kódnak a típusa?
(b) Adjuk meg a kód hibadetektálási és hibajavítási képességeit.
(c) Számítsuk ki a generátormátrixot és a paritásellenőrző mátrixot.
(d) Adjuk meg a hibacsoportokat.
(e) Konstruáljuk meg a szindróma dekódolási táblázatot.

Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(a) A kód típusa C(6,2), mivel a kódszavak $n = 6$ hosszúak és $4 = 2^k$ darab kódszó van, tehát $k = 2$.

Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(a) A kód típusa C(6,2), mivel a kódszavak $n = 6$ hosszúak és $4 = 2^k$ darab kódszó van, tehát $k = 2$.

(b) Bináris lineáris kódra

$$d_{\min} = \min_{c:c \neq (00...0)} w(c) = 3,$$

tehát a kód hiba detektálási képessége

$$d_{\min} - 1 = 2,$$

és a kód hibajavítási képessége

$$\left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1.$$

Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(c) A G generátormátrix első sora $c^{(2)}$, a 2. sora pedig $c^{(1)}$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A kód szisztematikus, mivel G baloldali 2×2-es blokkja az identitás mátrix.

$$G = \left[\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right].$$

Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(c)

$$G = \Bigg[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \underbrace{\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}}_{B}\Bigg]$$

Szisztematikus kódokra a H paritásellenőrző mátrix megkapható úgy, mint

$$H = (B^T, I_{n-k}) = \left[\underbrace{\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}}_{B^T} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Feladat

(d)

$$
\begin{aligned}
E_{(0000)} &= \{(000000), (010101), (101010), (111111)\},\\
E_{(0001)} &= \{(000001), (010100), (101011), (111110)\},\\
E_{(0010)} &= \{(000010), (010111), (101000), (111101)\},\\
E_{(0100)} &= \{(000100), (010001), (101110), (111011)\},\\
E_{(1000)} &= \{(001000), (011101), (100010), (110111)\},\\
E_{(0101)} &= \{(010000), (000101), (111010), (101111)\},\\
E_{(1010)} &= \{(100000), (110101), (001010), (011111)\},\\
E_{(0011)} &= \{(000011), (010110), (101001), (111100)\},
\end{aligned}
$$

Feladat

(d)

$$E_{(1001)} = \{(001001), (011100), (100011), (110110)\},$$
$$E_{(1011)} = \{(100001), (110100), (001011), (011110)\},$$
$$E_{(0110)} = \{(000110), (010011), (101100), (111001)\},$$
$$E_{(0111)} = \{(010010), (000111), (111000), (101101)\},$$
$$E_{(1111)} = \{(110000), (100101), (011010), (001111)\},$$
$$E_{(1100)} = \{(001100), (011001), (100110), (110011)\},$$
$$E_{(1110)} = \{(100100), (110001), (001110), (011011)\},$$
$$E_{(1101)} = \{(011000), (001101), (110010), (100111)\}.$$

Feladat

(e)

Szindróma vektor	csoportvezető hiba vektor
0001	000001
0010	000010
0100	000100
1000	001000
0101	010000
1010	100000
0011	000011
1001	001001
1011	100001
0110	000110
0111	010010
1111	110000
1100	001100
1110	100100
1101	011000