4. Műveletek GF(q) felett, Reed–Solomon kódok, ciklikus lineáris kódok

Kódolástechnika

GF(q) axiómái

GF(q) a q elemű Galois test (véges test).

Test axiómák

Összeadás "$+$"

$\alpha, \beta \in GF(q) \rightarrow \alpha + \beta \in GF(q)$

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

$\exists 0 : \forall \alpha \in GF(q) : \alpha + 0 = \alpha$

$\forall \alpha \in GF(q) \, \exists \beta : \alpha + \beta = 0;$

$\beta = \alpha_a^{-1} = -\alpha$

Szorzás "$*$"

$\alpha, \beta \in GF(q) \rightarrow \alpha * \beta \in GF(q)$

$\alpha * \beta = \beta * \alpha$

$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$

$\exists 1 : \forall \alpha \in GF(q) : \alpha * 1 = \alpha$

$\forall \alpha \in GF(q) \backslash \{0\} : \exists \beta : \alpha * \beta = 1;$

$\beta = \alpha_m^{-1} = \alpha^{-1}$

$$\alpha * (\beta + \gamma) = \alpha * \beta + \alpha * \gamma$$

"$+$" és "$*$" bármi lehet, amíg teljesítik a fenti axiómákat.

Példák GF(q)-ra

q lehet prímszám vagy prímhatvány (p^m, ahol p prím és $m \geq 2$).

Egyelőre a q prímszám esettel foglalkozunk. Ha q prímszám, akkor GF(q)-ban a műveletek mod q értendőek:

$$GF(q) = \{0, 1, \ldots, q-1\},$$

és

$$\alpha + \beta = \alpha + \beta \mod q,$$
$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta \mod q.$$

Például GF(7)-ben:

$$6 + 5 = 4 \mod 7 \qquad (6 + 5 = 11 = 4 \mod 7)$$
$$6 * 5 = 2 \mod 7 \qquad (6 \cdot 5 = 30 = 2 \mod 7)$$
$$4_a^{-1} = 3 \mod 7 \qquad (4 + 3 = 7 = 0 \mod 7)$$
$$4_m^{-1} = 2 \mod 7 \qquad (4 \cdot 2 = 8 = 1 \mod 7)$$

Hatványtábla

Alap tulajdonság: $\forall \alpha \in GF(q) \backslash \{0\} : \alpha^{q-1} = 1$.

Egy α elem rendje az a legkisebb pozitív m, amire $\alpha^m = 1$. Ha $m = q - 1$, akkor α-t primitív elemnek nevezzük.

Hatványtábla

Alap tulajdonság: $\forall \alpha \in GF(q) \backslash \{0\} : \alpha^{q-1} = 1$.

Egy α elem rendje az a legkisebb pozitív m, amire $\alpha^m = 1$. Ha $m = q - 1$, akkor α-t primitív elemnek nevezzük.

elem α	hatványok α^1 α^2 α^3 α^4 α^5 α^6	rend m	
1	1	1	
2	2 4 1	3	
3	3 2 6 4 5 1	6	– primitív elem
4	4 2 1	3	
5	5 4 6 2 3 1	6	– primitív elem
6	6 1	2	

Hatványtábla

Alap tulajdonság: $\forall \alpha \in GF(q) \backslash \{0\} : \alpha^{q-1} = 1$.

Egy α elem rendje az a legkisebb pozitív m, amire $\alpha^m = 1$. Ha $m = q - 1$, akkor α-t primitív elemnek nevezzük.

elem α	hatványok α^1 α^2 α^3 α^4 α^5 α^6	rend m	
1	1	1	
2	2 4 1	3	
3	3 2 6 4 5 1	6	– primitív elem
4	4 2 1	3	
5	5 4 6 2 3 1	6	– primitív elem
6	6 1	2	

Egy primitív elem hatványai kiadják a GF(q) összes nemnulla elemét.

Polinomok GF(q) felett

$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m$; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in GF(q)$

Gyökök: $x_1, \ldots, x_m$: $\alpha(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$

A gyökök száma $\leq \deg(\alpha(x)) = m$.

Ha $\alpha(x)$-nek $\deg(\alpha(x)) = m$ gyöke van, $x_1, \ldots, x_m$, akkor

$$\alpha(x) = \alpha_m \prod_{i=1}^{m} (x - x_i).$$

Polinomosztás: adott $\alpha(x)$ és $d(x)$ esetén, ahol
$\deg(\alpha(x)) = m > \deg(d(x)) = k$,

$$\exists q(x), r(x) : \alpha(x) = q(x)d(x) + r(x); \quad \deg(r(x)) < k.$$

$$a(x), d(x) \rightarrow \begin{array}{c} \text{Euklideszi algoritmus} \\ m - k \text{ lépés} \end{array} \rightarrow q(x), r(x)$$

1. feladat

Mi a 2 additív inverze GF(5)-ben?

1. feladat

Mi a 2 additív inverze GF(5)-ben?

Megoldás. $2 + 3 = 1 \cdot 5 + 0$, tehát a 2 additív inverze (ellentettje) GF(5)-ben

$$-2 = 2_a^{-1} = 3.$$

2. feladat

Mi a 2 multiplikatív inverze GF(5)-ben?

2. feladat

Mi a 2 multiplikatív inverze GF(5)-ben?

Megoldás. $2 \cdot 3 = 1 \cdot 5 + 1$, azaz

$$2 * 3 = 1 \mod 5,$$

tehát a 2 multiplikatív inverze (reciproka) GF(5)-ben

$$2^{-1} = 2_m^{-1} = 3.$$

3. feladat

Mi az 5 additív inverze GF(11)-ben?

3. feladat

Mi az 5 additív inverze GF(11)-ben?

Megoldás. $5 + 6 = 1 \cdot 11 + 0$, tehát az 5 additív inverze GF(11)-ben

$$-5 = 5_a^{-1} = 6.$$

4. feladat

Mi GF(11)-ben a 7 multiplikatív inverze?

4. feladat

Mi GF(11)-ben a 7 multiplikatív inverze?

Megoldás. $7 \cdot 8 = 5 \cdot 11 + 1$, azaz

$$7 * 8 = 1 \mod 11,$$

így a 7 multiplikatív inverze GF(11)-ben

$$7^{-1} = 7_m^{-1} = 8.$$

5. feladat

Oldjuk meg a $6x + 5 = 2$ egyenletet GF(7) felett.

5. feladat

Oldjuk meg a $6x + 5 = 2$ egyenletet GF(7) felett.

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
6x + 5 &= 2 \\
6x &= 2 - 5 \\
6x &= -3 \\
6x &= 4 \\
x &= 6^{-1} * 4 \\
x &= 6 * 4 \\
x &= 24 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Reed–Solomon kódok

Legyen $n = q - 1$ és $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ különböző nemnulla elemek GF(q)-ból.

Az ezeknek megfelelő $C(n, k)$ Reed-Solomon kód egy GF(q) feletti lineáris kód, melynek generátor mátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^{k-1} & \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{k-1} \end{bmatrix}$$

Reed–Solomon kódok

Legyen $n = q - 1$ és $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ különböző nemnulla elemek GF(q)-ból.

Az ezeknek megfelelő $C(n, k)$ Reed-Solomon kód egy GF(q) feletti lineáris kód, melynek generátor mátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^{k-1} & \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \ldots & \alpha_{n-1}^{k-1} \end{bmatrix}$$

Az RS kódokra teljesül az MDS tulajdonság:

$$d_{\min} = n - k + 1,$$

azaz a kód képes

- $n - k$ hibát detektálni, és
- $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$ hibát javítani.

Reed-Solomon kódok

Speciális eset: egy α primitív elem által generált RS kód. Ha az előbbi konstrukcióban $\alpha_i = \alpha^i$, akkor

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{k-1} & \alpha^{2(k-1)} & \dots & \alpha^{(n-1)(k-1)} \end{bmatrix},$$

és a paritás ellenőrző mátrix

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{2(n-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{n-k} & \alpha^{2(n-k)} & \dots & \alpha^{(n-k)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

6. feladat

Tervezzünk egy RS kódot GF(7) felett, ami képes 2 hiba javítására.

6. feladat

Tervezzünk egy RS kódot GF(7) felett, ami képes 2 hiba javítására.

Megoldás. Először az (n, k) paramétereket számítjuk ki.

6. feladat

Tervezzünk egy RS kódot GF(7) felett, ami képes 2 hiba javítására.

Megoldás. Először az (n, k) paramétereket számítjuk ki.

$$n = q - 1 = 6,$$

és a hibajavító képesség

$$t = \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 2 \qquad \rightarrow \qquad n - k = 4,$$

így

$$(n, k) = (6, 2).$$

6. feladat

Bármely GF(7) feletti C(6,2) RS kód megfelelő; például, ha az 5 primitív elem által generált Reed-Solomon kódot vesszük, akkor

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

és

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. feladat

Kódoljuk az előbbi kóddal a következő kódszavakat: $u = (4, 4)$, $u = (3, 5)$ és $u = (5, 1)$.

7. feladat

Kódoljuk az előbbi kóddal a következő kódszavakat: $u = (4, 4)$, $u = (3, 5)$ és $u = (5, 1)$.

Megoldás.

$$(4\,4) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1\,3\,6\,0\,5\,2)$$

7. feladat

Kódoljuk az előbbi kóddal a következő kódszavakat: $u = (4, 4)$, $u = (3, 5)$ és $u = (5, 1)$.

Megoldás.

$$(4\,4) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1\,3\,6\,0\,5\,2)$$

$$(3\,5) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1\,0\,2\,5\,6\,4)$$

7. feladat

Kódoljuk az előbbi kóddal a következő kódszavakat: $u = (4, 4)$, $u = (3, 5)$ és $u = (5, 1)$.

Megoldás.

$$(4\,4) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1\,3\,6\,0\,5\,2)$$

$$(3\,5) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (1\,0\,2\,5\,6\,4)$$

$$(5\,1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (6\,3\,2\,4\,0\,1)$$

8. feladat

Adjuk meg a GF(5) feletti, a 2 primitív elem által generált, 1 hiba javítására képes RS kód generátor mátrixát és paritás ellenőrző mátrixát.

8. feladat

Adjuk meg a GF(5) feletti, a 2 primitív elem által generált, 1 hiba javítására képes RS kód generátor mátrixát és paritás ellenőrző mátrixát.

Megoldás. A hibajavító képesség alapján

$$t = \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 1 \qquad \rightarrow \qquad n - k = 2.$$

8. feladat

Adjuk meg a GF(5) feletti, a 2 primitív elem által generált, 1 hiba javítására képes RS kód generátor mátrixát és paritás ellenőrző mátrixát.

Megoldás. A hibajavító képesség alapján

$$t = \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 1 \qquad \rightarrow \qquad n - k = 2.$$

$q = 5$ miatt $n = q - 1 = 4$, így $(n, k) = (4, 2)$, és

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

9. feladat

Egy GF(11) feletti C(10,4) RS kód generátor mátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

(a) Mennyi hibát képes a kód javítani?

(b) Milyen primitív elem segítségével generáltuk a kódot?

(c) Adjuk meg a H paritás ellenőrző mátrixot.

9. feladat

Megoldás.

(a) Ez egy RS kód, tehát $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10-4}{2} \right\rfloor = 3$ hibát képes javítani.

9. feladat

Megoldás.

(a) Ez egy RS kód, tehát $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10-4}{2} \right\rfloor = 3$ hibát képes javítani.

(b) A 6 primitív elem segítségével generáltuk:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

9. feladat

Megoldás.

(a) Ez egy RS kód, tehát $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10-4}{2} \right\rfloor = 3$ hibát képes javítani.

(b) A 6 primitív elem segítségével generáltuk:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

(c)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 5 & 1 & 9 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 1 & 10 & 1 & 10 & 1 & 10 & 1 & 10 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 & 5 & 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

10. feladat

Egy GF(7) feletti RS kód paritás ellenőrző mátrixa

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Mi a kód típusa (azaz az n és k paraméterek értéke)?

(a) Hány hiba javítására képes a kód?

(c) Adjuk meg a csupa 2-esből álló üzenethez tartozó kódszót.

10. feladat

Megoldás.

(a) A H paritás ellenőrző mátrix mérete egy C(n, k) RS kód esetén $(n - k) \times n$. Jelen esetben H 4×6-os, tehát $(n, k) = (6, 2)$.

10. feladat

Megoldás.

(a) A H paritás ellenőrző mátrix mérete egy C(n, k) RS kód esetén $(n - k) \times n$. Jelen esetben H 4×6-os, tehát $(n, k) = (6, 2)$.

(b) Egy RS kódra a hibajavítási képesség $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 2$.

10. feladat

Megoldás.

(a) A H paritás ellenőrző mátrix mérete egy C(n, k) RS kód esetén $(n-k) \times n$. Jelen esetben H 4×6-os, tehát $(n, k) = (6, 2)$.

(b) Egy RS kódra a hibajavítási képesség $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 2$.

(c) A kódot a 3 primitív elem generálja, tehát

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

és

$$c = uG = (2\,2) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} = (4\,1\,6\,0\,3\,5).$$

11. feladat

Egy C(6,3) RS kódot a véges test legnagyobb primitív eleme generál.

(a) Adjuk meg a G generátor mátrixot.

(b) Adjuk meg a H paritás ellenőrző mátrixot.

(c) Hány hibát képes a kód detektálni? Hány hibát képes javítani?

11. feladat

Megoldás.

(a) q értéke közvetlenül ugyan nincs megadva, de $n = q - 1$, ahonnan $q = 7$. GF(7)-ben a legnagyobb primitív elem az 5, így

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

11. feladat

Megoldás.

(a) q értéke közvetlenül ugyan nincs megadva, de $n = q - 1$, ahonnan $q = 7$. GF(7)-ben a legnagyobb primitív elem az 5, így

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

11. feladat

Megoldás.

(a) q értéke közvetlenül ugyan nincs megadva, de $n = q - 1$, ahonnan $q = 7$. GF(7)-ben a legnagyobb primitív elem az 5, így

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b)

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(c) A kód képes

- $n - k = 3$ hibát detektálni, és
- $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor = 1$ hibát javítani.

Lineáris ciklikus kódok

Egy kód ciklikus, ha bármely

$$c = (c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}),$$

kódszó esetén a ciklikus eltoltja:

$$Sc = (c_{n-1}\, c_0\, c_1 \ldots c_{n-2})$$

szintén kódszó. S a ciklikus eltolás operátor.

Lineáris ciklikus kódok

Egy kód ciklikus, ha bármely

$$c = (c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}),$$

kódszó esetén a ciklikus eltoltja:

$$Sc = (c_{n-1}\, c_0\, c_1 \ldots c_{n-2})$$

szintén kódszó. S a ciklikus eltolás operátor.

Egy α primitív elem által generált Reed-Solomon kód egyúttal ciklikus lineáris kód is.

Lineáris ciklikus kódok

Példa. A GF(5) feletti, 2 primitív elem által generált C(4,2) RS kód kódszavai:

$(0\,0) \to (0\,0\,0\,0)$	$(2\,3) \to (0\,3\,4\,1)$
$(0\,1) \to (1\,2\,4\,3)$	$(2\,4) \to (1\,0\,3\,4)$
$(0\,2) \to (2\,4\,3\,1)$	$(3\,0) \to (3\,3\,3\,3)$
$(0\,3) \to (3\,1\,2\,4)$	$(3\,1) \to (4\,0\,2\,1)$
$(0\,4) \to (4\,3\,1\,2)$	$(3\,2) \to (0\,2\,1\,4)$
$(1\,0) \to (1\,1\,1\,1)$	$(3\,3) \to (1\,4\,0\,2)$
$(1\,1) \to (2\,3\,0\,4)$	$(3\,4) \to (2\,1\,4\,0)$
$(1\,2) \to (3\,0\,4\,2)$	$(4\,0) \to (4\,4\,4\,4)$
$(1\,3) \to (4\,2\,3\,0)$	$(4\,1) \to (0\,1\,3\,2)$
$(1\,4) \to (0\,4\,2\,3)$	$(4\,2) \to (1\,3\,2\,0)$
$(2\,0) \to (2\,2\,2\,2)$	$(4\,3) \to (2\,0\,1\,3)$
$(2\,1) \to (3\,4\,1\,0)$	$(4\,4) \to (3\,2\,0\,1)$
$(2\,2) \to (4\,1\,0\,3)$	

12. feladat

Egy GF(7) feletti C(6,2) lineáris ciklikus kód 2 hibát tud kijavítani. A (6,0,3,5,4,1) szerepel a kódszavak között.

(a) Kódszó-e az (5,4,1,6,0,3)?

(b) Kódszó-e az (1,0,4,2,3,6)?

(c) Kódszó-e az (1,0,4,3,5,2)?

12. feladat

Egy GF(7) feletti C(6,2) lineáris ciklikus kód 2 hibát tud kijavítani. A (6,0,3,5,4,1) szerepel a kódszavak között.

(a) Kódszó-e az (5,4,1,6,0,3)?

(b) Kódszó-e az (1,0,4,2,3,6)?

(c) Kódszó-e az (1,0,4,3,5,2)?

Megoldás.

(a) Igen, mert a megadott kódszó ciklikus eltoltja (3-szor kell eltolni).

12. feladat

Egy GF(7) feletti C(6,2) lineáris ciklikus kód 2 hibát tud kijavítani. A (6,0,3,5,4,1) szerepel a kódszavak között.

(a) Kódszó-e az (5,4,1,6,0,3)?

(b) Kódszó-e az (1,0,4,2,3,6)?

(c) Kódszó-e az (1,0,4,3,5,2)?

Megoldás.

(a) Igen, mert a megadott kódszó ciklikus eltoltja (3-szor kell eltolni).

(b) Igen, mert a megadott kódszó konstansszorosa (6-tal kell szorozni, ez például arról a helyiértékről látszik, ahol az 1-es szerepel).

12. feladat

Egy GF(7) feletti C(6,2) lineáris ciklikus kód 2 hibát tud kijavítani. A (6,0,3,5,4,1) szerepel a kódszavak között.

(a) Kódszó-e az (5,4,1,6,0,3)?

(b) Kódszó-e az (1,0,4,2,3,6)?

(c) Kódszó-e az (1,0,4,3,5,2)?

Megoldás.

(a) Igen, mert a megadott kódszó ciklikus eltoltja (3-szor kell eltolni).

(b) Igen, mert a megadott kódszó konstansszorosa (6-tal kell szorozni, ez például arról a helyiértékről látszik, ahol az 1-es szerepel).

(c) Nem, mert a kód 2 hibát képes javítani $\rightarrow$ $d_{\min} \geq 5$, viszont a (b) és (c)-beli vektorok Hamming-távolsága csak 3.

Kódpolinomok

Polinomokat rendelünk a kódszavakhoz:

$$c = (c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}) \quad \rightarrow \quad c(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

Ekkor az Sc-hez rendelt polinom

$$c'(x) = [xc(x)] \mod (x^n - 1).$$

Hasonlóan az üzenetekhez, hibavektorhoz stb. is rendelhetünk polinomot.

Kódpolinomok

Polinomokat rendelünk a kódszavakhoz:

$$c = (c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}) \quad \rightarrow \quad c(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

Ekkor az Sc-hez rendelt polinom

$$c'(x) = [xc(x)] \mod (x^n - 1).$$

Hasonlóan az üzenetekhez, hibavektorhoz stb. is rendelhetünk polinomot.

Bármely $C(n, k)$ ciklikus lineáris kódra létezik egy $(n-k)$-adfokú $g(x)$ kódpolinom, melyre teljesül, hogy minden kódpolinom

$$c(x) = g(x)u(x)$$

alakú. $g(x)$-et a kód generátorpolinomjának nevezzük.

Kódpolinomok

Polinomokat rendelünk a kódszavakhoz:

$$c = (c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}) \quad \rightarrow \quad c(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

Ekkor az Sc-hez rendelt polinom

$$c'(x) = [xc(x)] \mod (x^n - 1).$$

Hasonlóan az üzenetekhez, hibavektorhoz stb. is rendelhetünk polinomot.

Bármely $C(n, k)$ ciklikus lineáris kódra létezik egy $(n-k)$-adfokú $g(x)$ kódpolinom, melyre teljesül, hogy minden kódpolinom

$$c(x) = g(x)u(x)$$

alakú. $g(x)$-et a kód generátorpolinomjának nevezzük.

$g(x)|x^n - 1$ mindig teljesül, és tetszőleges ilyen $g(x)$ megfelelő generátorpolinom egy ciklikus lineáris kódhoz.

Kódpolinomok

Példa. A GF(5) feletti, 2 primitív elem által generált C(4,2) RS kód generátorpolinomja

$$g(x) = 3 + 4x + x^2.$$

Néhány kódszóhoz tartozó polinom:

$$(1\,2\,4\,3) \to 1 + 2x + 4x^2 + 3x^3 = (2 + 3x)(3 + 4x + x^2),$$
$$(0\,3\,4\,1) \to 3x + 4x^2 + x^3 = x(3 + 4x + x^2),$$
$$(4\,4\,4\,4) \to 4 + 4x + 4x^2 + 4x^3 = (3 + 4x)(3 + 4x + x^2).$$

Kódpolinomok

$g(x)$ megadja a kódszavak halmazát, de azt nem, hogy hogyan rendeljük hozzá az üzenetekhez a kódszavakat. A lineáris kódokra szokásos $c = uG$ hozzárendelés egy lehetőség, de polinomok esetén praktikusabb a

$$c(x) = u(x)g(x)$$

képlettel dolgozni. (Ez egy másik hozzárendelést ad meg, mint a $c = uG$ képlet.)

Lineáris ciklikus kódok

Példa. C(4,2) RS kód GF(5) felett a $c(x) = u(x)g(x)$ kódszó hozzárendeléssel:

$(0\,0) \to (0\,0\,0\,0)$	$(2\,3) \to (4\,3\,1\,2)$
$(0\,1) \to (3\,4\,1\,0)$	$(2\,4) \to (2\,2\,2\,2)$
$(0\,2) \to (1\,3\,2\,0)$	$(3\,0) \to (0\,4\,2\,3)$
$(0\,3) \to (4\,2\,3\,0)$	$(3\,1) \to (3\,3\,3\,3)$
$(0\,4) \to (2\,1\,4\,0)$	$(3\,2) \to (1\,2\,4\,3)$
$(1\,0) \to (0\,3\,4\,1)$	$(3\,3) \to (4\,1\,0\,3)$
$(1\,1) \to (3\,2\,0\,1)$	$(3\,4) \to (2\,0\,1\,3)$
$(1\,2) \to (1\,1\,1\,1)$	$(4\,0) \to (0\,2\,1\,4)$
$(1\,3) \to (4\,0\,2\,1)$	$(4\,1) \to (3\,1\,2\,4)$
$(1\,4) \to (2\,4\,3\,1)$	$(4\,2) \to (1\,0\,3\,4)$
$(2\,0) \to (0\,1\,3\,2)$	$(4\,3) \to (4\,4\,4\,4)$
$(2\,1) \to (3\,0\,4\,2)$	$(4\,4) \to (2\,3\,0\,4)$
$(2\,2) \to (1\,4\,0\,2)$	

Lineáris ciklikus kódok

Példa. C(4,2) RS kód GF(5) felett szisztematikus kódszó hozzárendeléssel:

$(0\,0) \to (0\,0\,0\,0)$	$(2\,3) \to (2\,3\,0\,4)$
$(0\,1) \to (0\,1\,3\,2)$	$(2\,4) \to (2\,4\,3\,1)$
$(0\,2) \to (0\,2\,1\,4)$	$(3\,0) \to (3\,0\,4\,2)$
$(0\,3) \to (0\,3\,4\,1)$	$(3\,1) \to (3\,1\,2\,4)$
$(0\,4) \to (0\,4\,2\,3)$	$(3\,2) \to (3\,2\,0\,1)$
$(1\,0) \to (1\,0\,3\,4)$	$(3\,3) \to (3\,3\,3\,3)$
$(1\,1) \to (1\,1\,1\,1)$	$(3\,4) \to (3\,4\,1\,0)$
$(1\,2) \to (1\,2\,4\,3)$	$(4\,0) \to (4\,0\,2\,1)$
$(1\,3) \to (1\,3\,2\,0)$	$(4\,1) \to (4\,1\,0\,3)$
$(1\,4) \to (1\,4\,0\,2)$	$(4\,2) \to (4\,2\,3\,0)$
$(2\,0) \to (2\,0\,1\,3)$	$(4\,3) \to (4\,3\,1\,2)$
$(2\,1) \to (2\,1\,4\,0)$	$(4\,4) \to (4\,4\,4\,4)$
$(2\,2) \to (2\,2\,2\,2)$	

Lineáris ciklikus kódok

A $g(x)$-hez tartozó paritás ellenőrző polinom

$$h(x) = \frac{x^n - 1}{g(x)}.$$

A $v(x)$ vett kódszóhoz tartozó szindróma polinom

$$s(x) = v(x) \mod g(x) \iff s(x) = v(x) : g(x)$$

Lineáris ciklikus kódok

A $g(x)$-hez tartozó paritás ellenőrző polinom

$$h(x) = \frac{x^n - 1}{g(x)}.$$

A $v(x)$ vett kódszóhoz tartozó szindróma polinom

$$s(x) = v(x) \mod g(x) \iff s(x) = v(x) : g(x)$$

Az α primitív elem által generált Reed-Solomon kód generátor és paritás-ellenőrző polinomja

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n-k} (x - \alpha^i), \qquad h(x) = \prod_{i=n-k+1}^{n} (x - \alpha^i).$$

Lineáris ciklikus kódok

A $g(x)$-hez tartozó paritás ellenőrző polinom

$$h(x) = \frac{x^n - 1}{g(x)}.$$

A $v(x)$ vett kódszóhoz tartozó szindróma polinom

$$s(x) = v(x) \mod g(x) \iff s(x) = v(x) : g(x)$$

Az α primitív elem által generált Reed-Solomon kód generátor és paritás-ellenőrző polinomja

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n-k} (x - \alpha^i), \qquad h(x) = \prod_{i=n-k+1}^{n} (x - \alpha^i).$$

Fontos tulajdonság: a polinom szorzás és osztás hatékonyan kiszámítható.

13. feladat

Adjuk meg a GF(7) feletti, 3 primitív elem által generált, 2 hiba javítására képes ciklikus lineáris RS kód generátor polinomját és paritás ellenőrző polinomját.

13. feladat

Adjuk meg a GF(7) feletti, 3 primitív elem által generált, 2 hiba javítására képes ciklikus lineáris RS kód generátor polinomját és paritás ellenőrző polinomját.

Megoldás.

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n-k}(x - \alpha^i) = (x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4) =$$

$$(x-3)(x-2)(x-6)(x-4) = (x^2+2x+6)(x^2+4x+3) =$$

$$x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x + 4.$$

$$h(x) = \prod_{i=n-k+1}^{n}(x - \alpha^i) = (x-3^5)(x-3^6) =$$

$$(x-5)(x-1) = x^2 + x + 5.$$

14. feladat

Az előző kód segítségével adjuk meg a következő üzenetekhez tartozó kódszavakat: $(1\,1)$ és $(0\,2)$.

14. feladat

Az előző kód segítségével adjuk meg a következő üzenetekhez tartozó kódszavakat: (1 1) és (0 2).

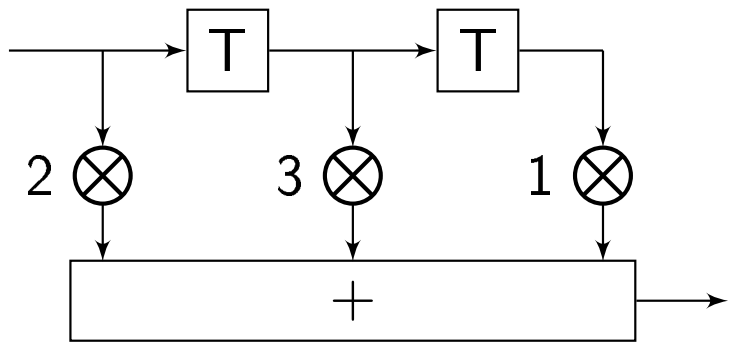
Megoldás.

$$c_1(x) = u_1(x)g(x) = (1+x)(4+2x+3x^2+6x^3+x^4) =$$
$$4+6x+5x^2+2x^3+0\cdot x^4+x^5 \;\to\; c_1 = (4\,6\,5\,2\,0\,1)$$
$$c_2(x) = u_2(x)g(x) = (0+2x)(4+2x+3x^2+6x^3+x^4) =$$
$$0+1\cdot x+4x^2+6x^3+5x^4+2x^5 \;\to\; c_2 = (0\,1\,4\,6\,5\,2)$$

(Egyébként $c_2 = S^2 c_1$.)

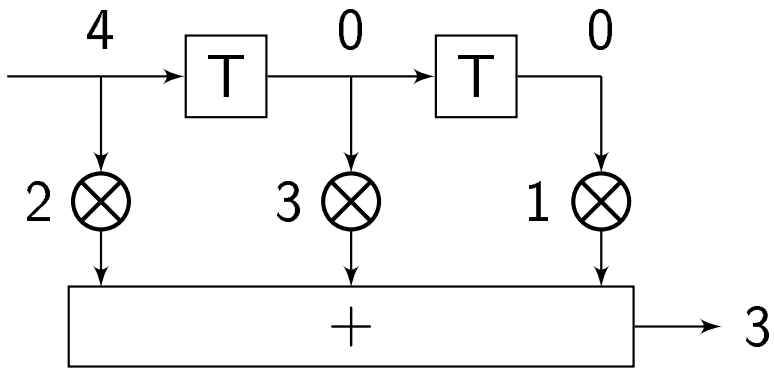
Polinom szorzás LFFSR révén

A $2 + 3x + x^2$ polinommal való szorzáshoz tartozó Linear FeedForward Shift Register architektúra:



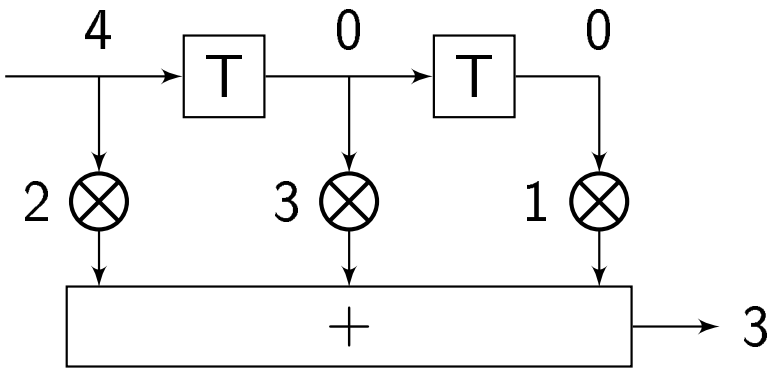
Polinom szorzás LFFSR révén

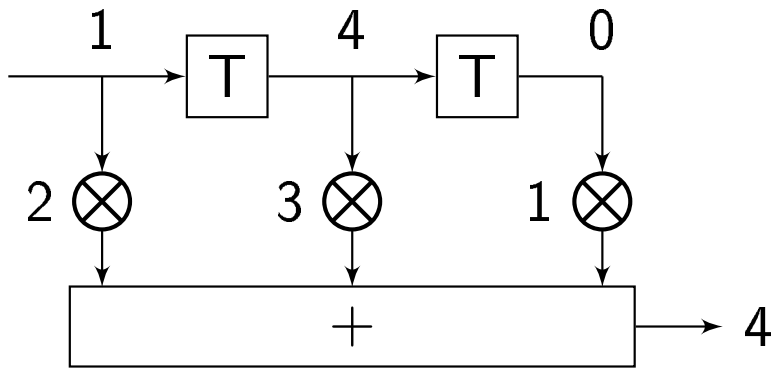
Számítsuk ki $(2 + 3x + x^2)(4 + x)$-et GF(5) felett:



Polinom szorzás LFFSR révén

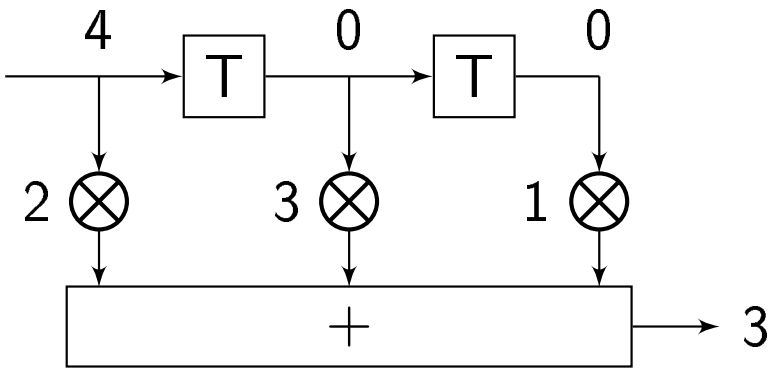
Számítsuk ki $(2 + 3x + x^2)(4 + x)$-et GF(5) felett:

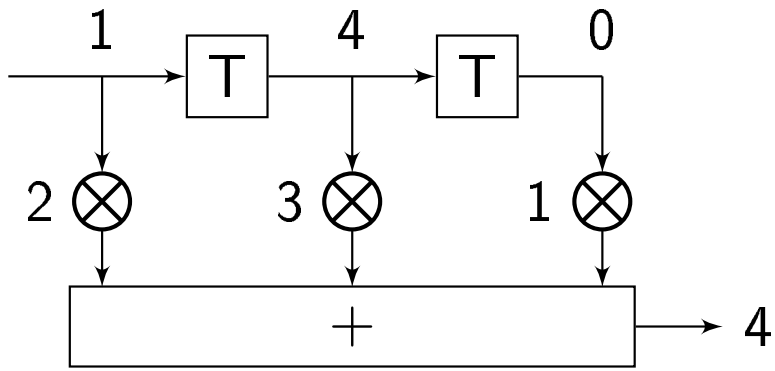


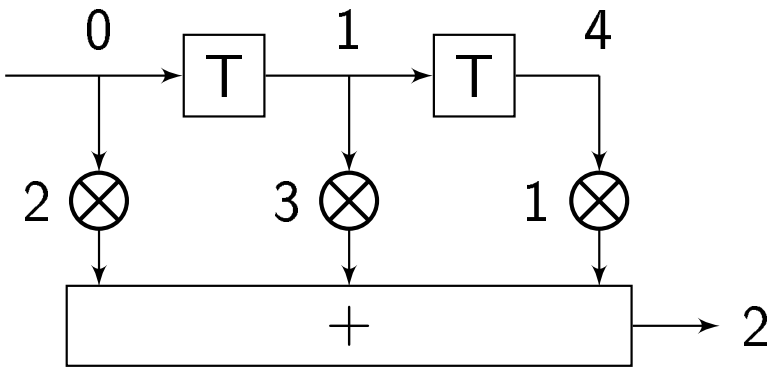


Polinom szorzás LFFSR révén

Számítsuk ki $(2 + 3x + x^2)(4 + x)$-et GF(5) felett:

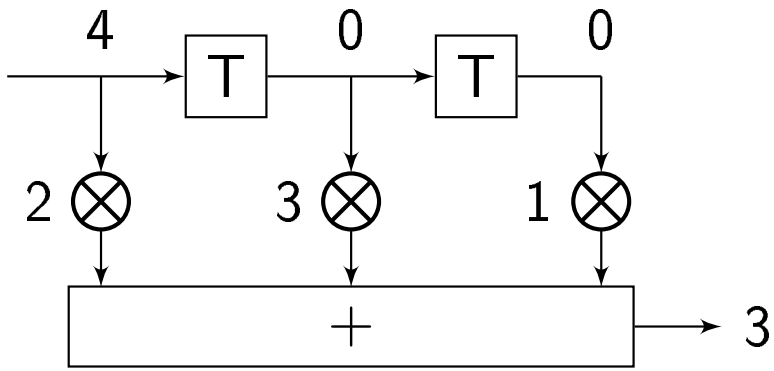


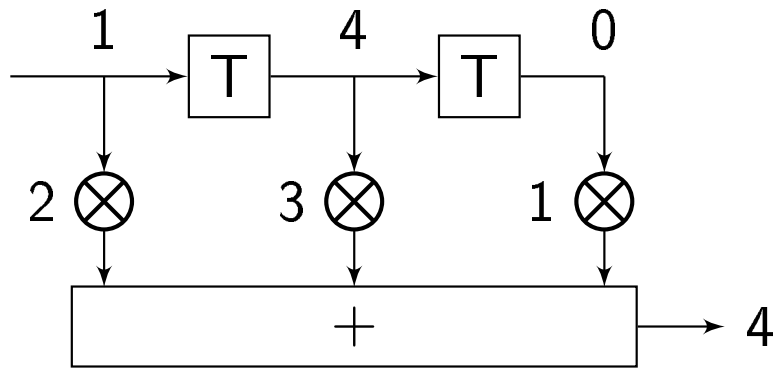


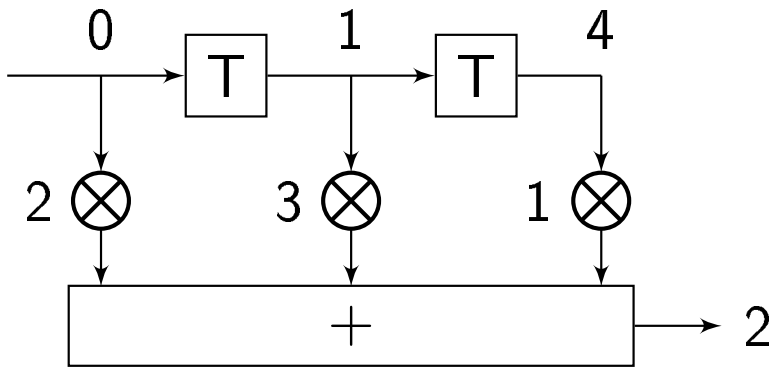


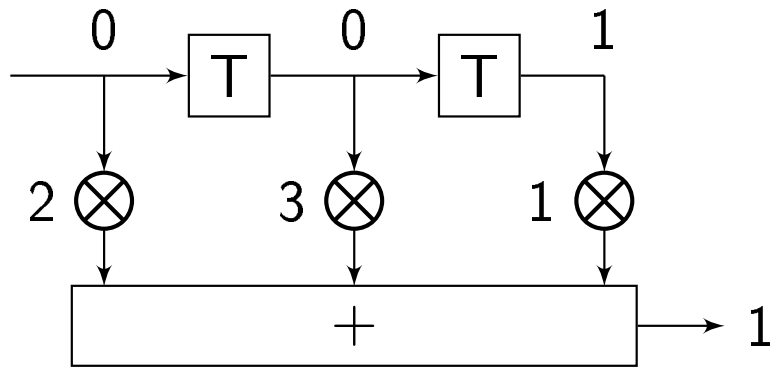
Polinom szorzás LFFSR révén

Számítsuk ki $(2 + 3x + x^2)(4 + x)$-et GF(5) felett:



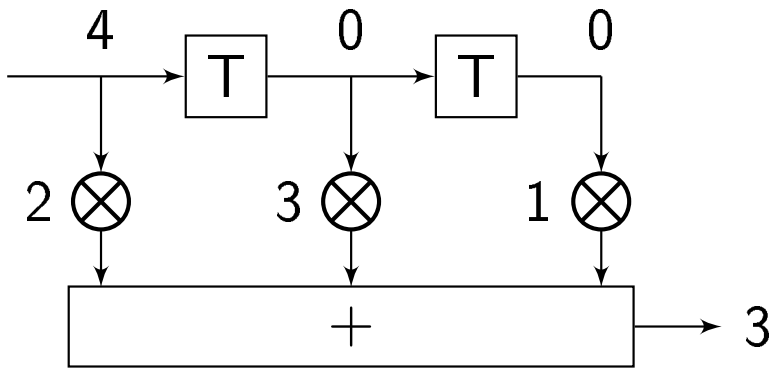


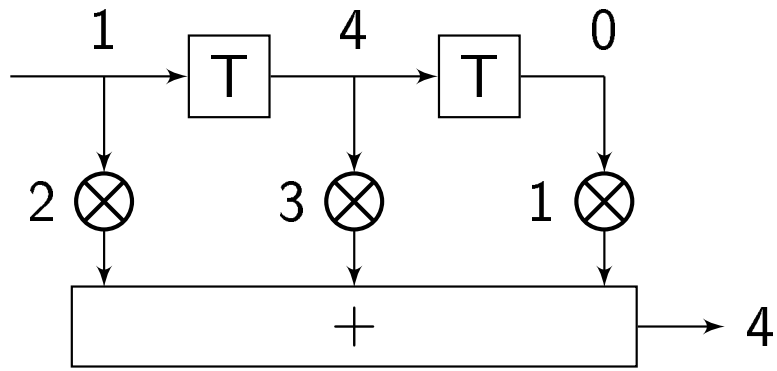


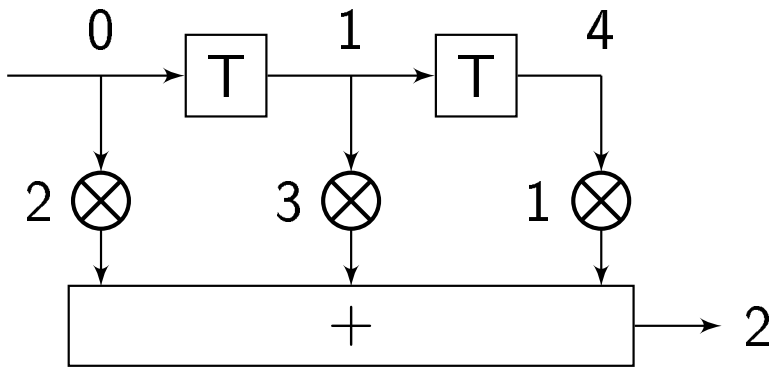


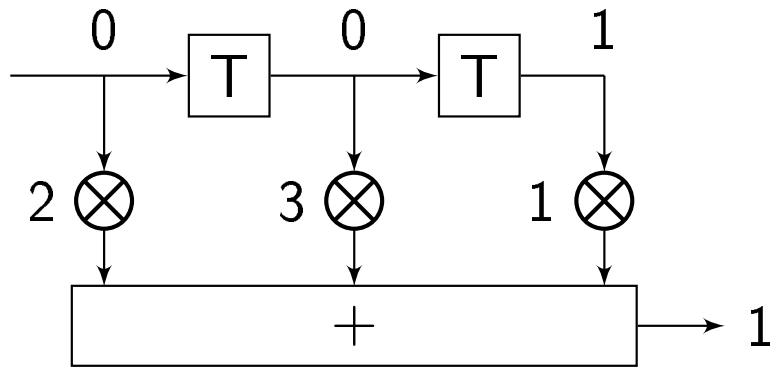
Polinom szorzás LFFSR révén

Számítsuk ki $(2 + 3x + x^2)(4 + x)$-et GF(5) felett:









$$(3, 4, 2, 1) \longrightarrow 3 + 4x + 2x^2 + x^3$$

Polinom osztás LFBSR révén

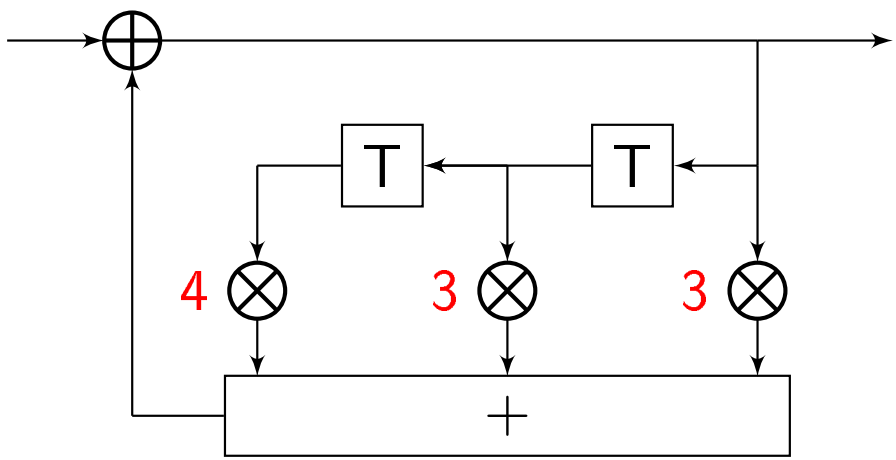
A GF(5) feletti, $3 + 2x + x^2$ polinommal való osztáshoz tartozó Linear Feedback Shift Register architektúra. Előkészület: ha az együtthatók

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1;$$

akkor a regiszterekbe

$$1 - a_0 = 3, \quad -a_1 = 3, \quad -a_2 = 4$$

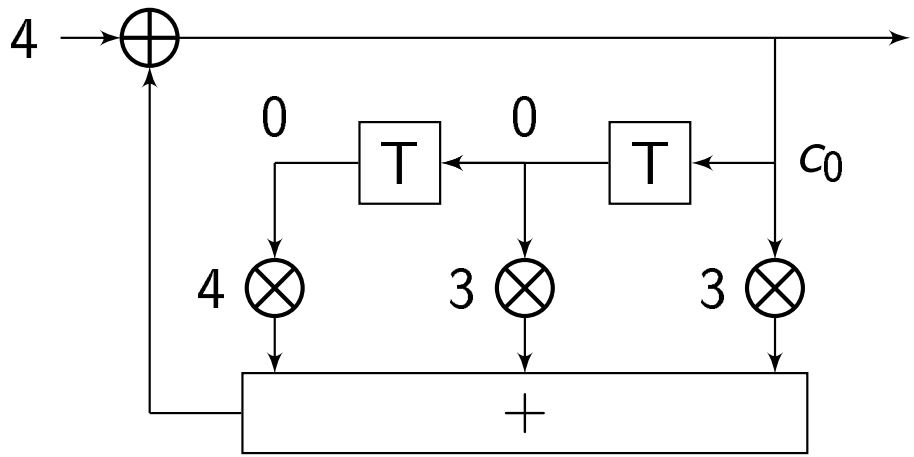
kerül:



Polinom osztás LFBSR révén

Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.

Az LFBSR 2 lépésben működik. Először c_0-ból indulva megtesz egy teljes kört, ez alapján felír egy lineáris egyenletet c_0-ra.



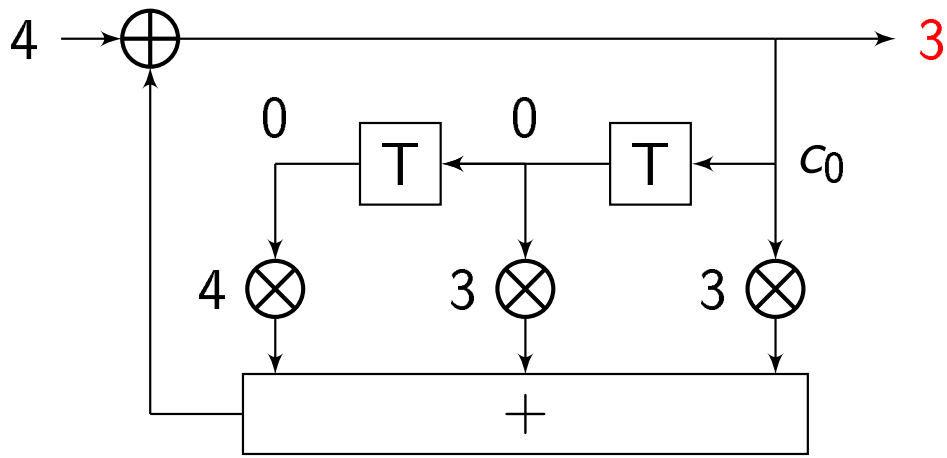
$$4 + 3c_0 = c_0$$

Polinom osztás LFBSR révén

Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.

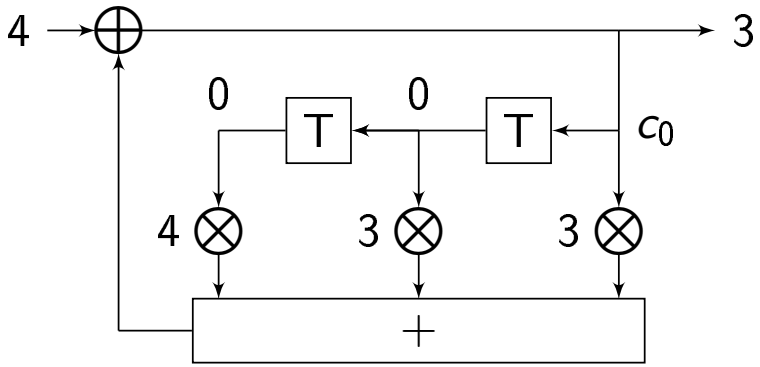
A második lépésben megoldja a lineáris egyenletet c_0-ra, és a megoldást továbbítja a kimeneten és c_0 helyére is beírja.

$$4 + 3c_0 = c_0 \rightarrow 2c_0 = -4 \rightarrow c_0 = 2^{-1} * 1 = 3 * 1 = 3.$$



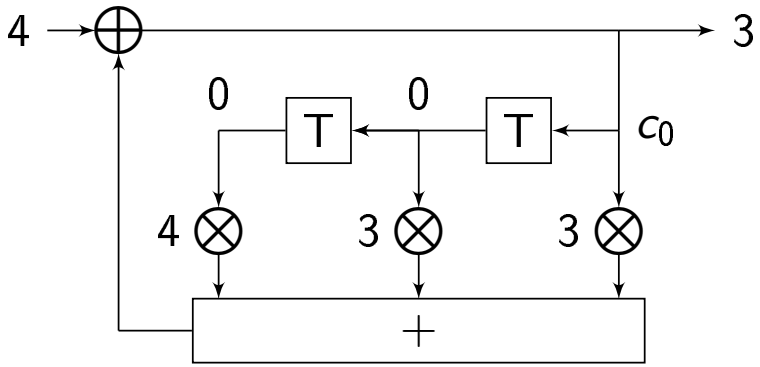
Polinom osztás LFBSR révén

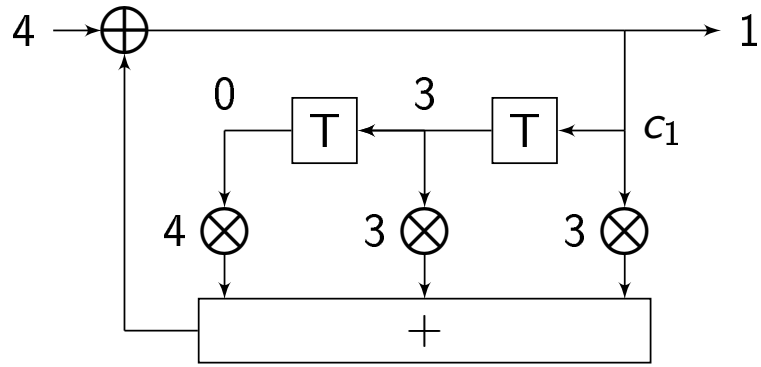
Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.



Polinom osztás LFBSR révén

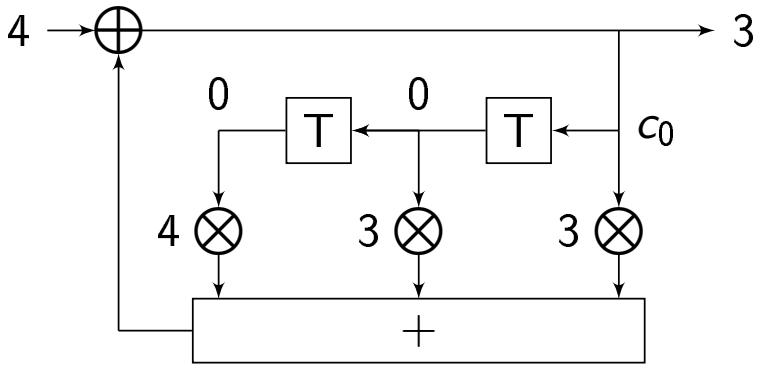
Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.

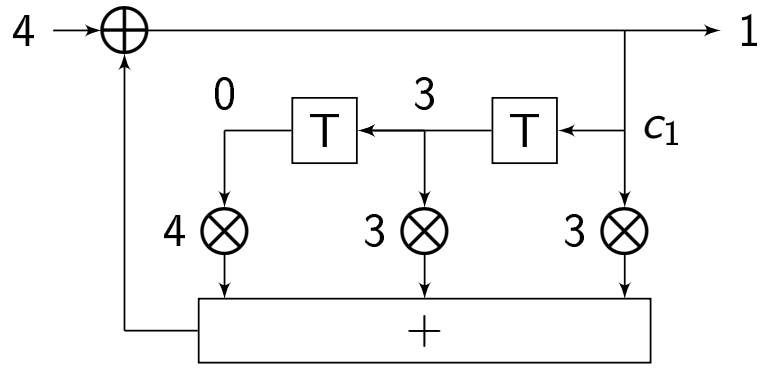


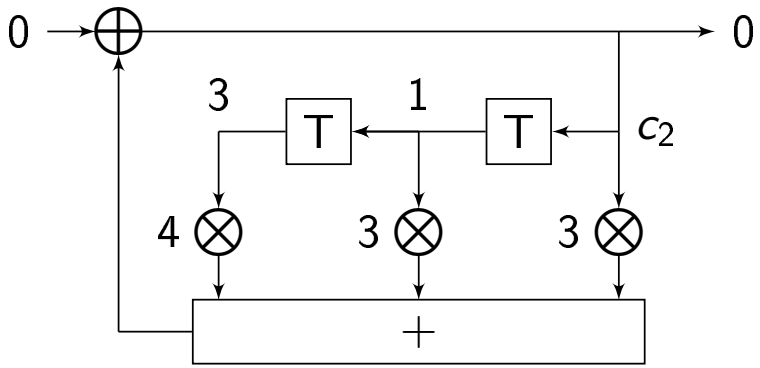


Polinom osztás LFBSR révén

Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.

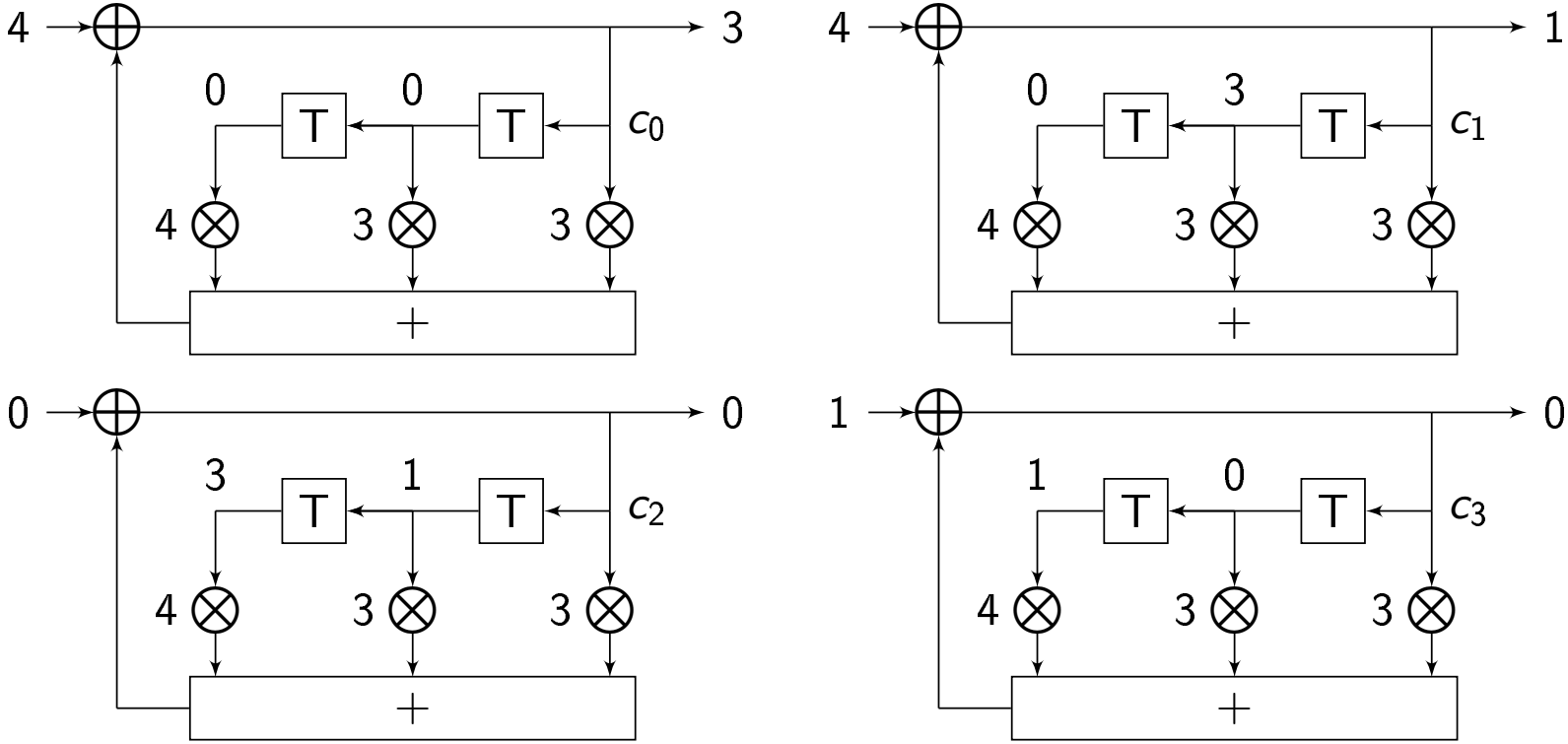






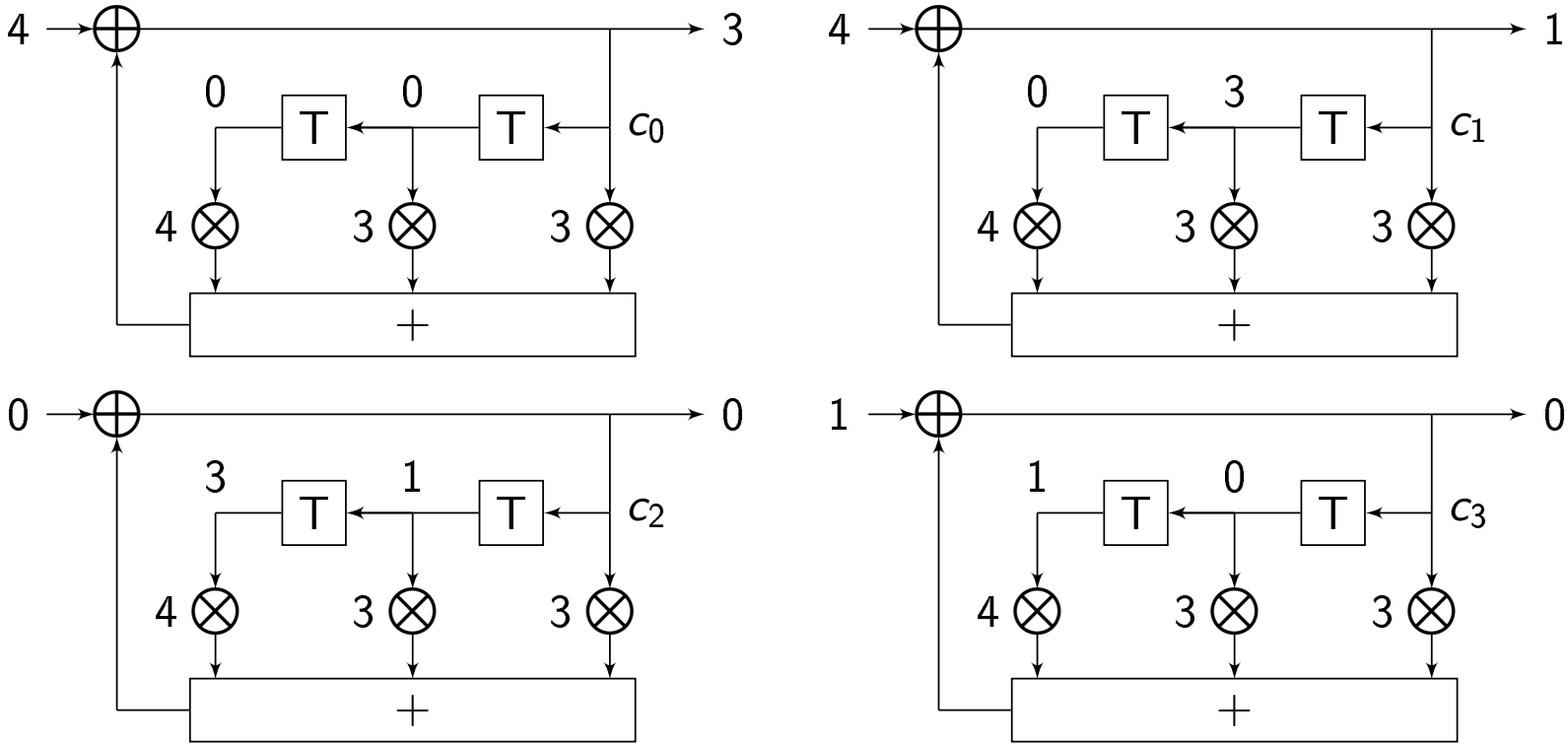
Polinom osztás LFBSR révén

Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.



Polinom osztás LFBSR révén

Számítsuk ki $(4 + 4x + x^3) : (3 + 2x + x^2)$ eredményét GF(5) felett.



$$(3, 1, 0, 0) \qquad \rightarrow \qquad 3 + x$$

A kód séma implementálása

A szindróma dekódoló táblázat (a paraméterektől függően) lehet nagy méretű; viszont a szindróma dekódolás lecserélhető egy gyors, a detektált hibát valós időben kiszámító eljárásra, az Error Trapping Algorithm-re (ETA).