7. Entrópia forráskódolás és adattömörítés

Kódolástechnika

Forráskódolás és adattömörítés

Egy tipikus szövegben a különböző karakterek gyakorisága eltérő. A normál (tömörítés nélküli) kódolás során minden karaktert adott számú bittel kódolunk.

Forráskódolás és adattömörítés

Egy tipikus szövegben a különböző karakterek gyakorisága eltérő. A normál (tömörítés nélküli) kódolás során minden karaktert adott számú bittel kódolunk.

Most megengedünk változó hosszúságú bitsorozatokat is a kódszavaknak, hogy alacsonyabb átlagos kódszóhosszat érjünk el.

Forráskódolás és adattömörítés

Egy tipikus szövegben a különböző karakterek gyakorisága eltérő. A normál (tömörítés nélküli) kódolás során minden karaktert adott számú bittel kódolunk.

Most megengedünk változó hosszúságú bitsorozatokat is a kódszavaknak, hogy alacsonyabb átlagos kódszóhosszat érjünk el.

Egy kódolás *prefix-mentes*, ha semelyik kódszó eleje nem egyezik meg egy másik kódszóval. Ez a tulajdonság a dekódolhatóság miatt fontos.

Forráskódolás és adattömörítés

Egy tipikus szövegben a különböző karakterek gyakorisága eltérő. A normál (tömörítés nélküli) kódolás során minden karaktert adott számú bittel kódolunk.

Most megengedünk változó hosszúságú bitsorozatokat is a kódszavaknak, hogy alacsonyabb átlagos kódszóhosszat érjünk el.

Egy kódolás *prefix-mentes*, ha semelyik kódszó eleje nem egyezik meg egy másik kódszóval. Ez a tulajdonság a dekódolhatóság miatt fontos.

Feltesszük, hogy az egyes karakterek gyakorisága a szövegben ismert:

$$p_1, \dots, p_K,$$

ahol K az ábécé mérete.

Forráskódolás és adattömörítés

Ha a k-adik karakterhez rendelt kódszó hossza ℓ_k, akkor az *átlagos kódszóhossz*

$$L = \sum_{k=1}^{K} p_k \ell_k.$$

Forráskódolás és adattömörítés

Ha a k-adik karakterhez rendelt kódszó hossza ℓ_k, akkor az *átlagos kódszóhossz*

$$L = \sum_{k=1}^{K} p_k \ell_k.$$

A forrás *entrópiája*

$$H(X) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log_2(1/p_k).$$

Elméleti alsó korlát: tetszőleges prefix-mentes kódra

$$L \geq H(X),$$

és a $H(X)/L$ arány a kód *hatékonysága*.

Shannon–Fano kódolás

Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil.$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Shannon–Fano kódolás

Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil.$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

Shannon–Fano kódolás

Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil .$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$\ell_1 = \lceil \log_2(1/0.37) \rceil = 2, \qquad \ell_2 = \lceil \log_2(1/0.27) \rceil = 2,$$
$$\ell_3 = \lceil \log_2(1/0.24) \rceil = 3, \qquad \ell_4 = \lceil \log_2(1/0.12) \rceil = 4.$$

Shannon–Fano kódolás

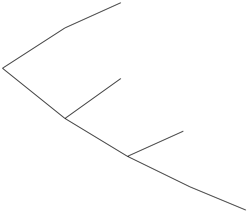
Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil.$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$\ell_1 = \lceil \log_2(1/0.37) \rceil = 2, \qquad \ell_2 = \lceil \log_2(1/0.27) \rceil = 2,$$
$$\ell_3 = \lceil \log_2(1/0.24) \rceil = 3, \qquad \ell_4 = \lceil \log_2(1/0.12) \rceil = 4.$$



Shannon–Fano kódolás

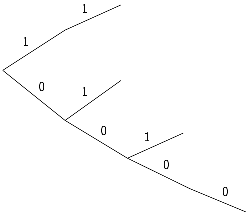
Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil .$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$\ell_1 = \lceil \log_2(1/0.37) \rceil = 2, \qquad \ell_2 = \lceil \log_2(1/0.27) \rceil = 2,$$
$$\ell_3 = \lceil \log_2(1/0.24) \rceil = 3, \qquad \ell_4 = \lceil \log_2(1/0.12) \rceil = 4.$$



Shannon–Fano kódolás

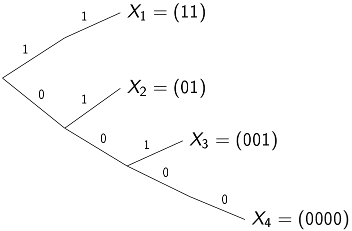
Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil.$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$\ell_1 = \lceil \log_2(1/0.37) \rceil = 2, \qquad \ell_2 = \lceil \log_2(1/0.27) \rceil = 2,$$
$$\ell_3 = \lceil \log_2(1/0.24) \rceil = 3, \qquad \ell_4 = \lceil \log_2(1/0.12) \rceil = 4.$$



Shannon–Fano kódolás

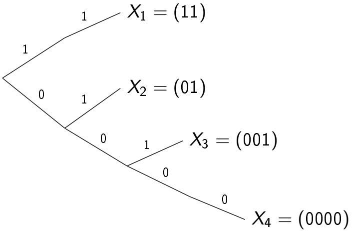
Shannon–Fano kódolás esetén a kódszóhosszak

$$\ell_k = \lceil \log_2(1/p_k) \rceil.$$

Készítünk egy bináris fát, amelyre a levelek mélysége $\ell_1, \ldots, \ell_K$, a kódszavakat pedig a gyökértől a levelekhez vezető út alapján adjuk meg.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$\ell_1 = \lceil \log_2(1/0.37) \rceil = 2, \qquad \ell_2 = \lceil \log_2(1/0.27) \rceil = 2,$$
$$\ell_3 = \lceil \log_2(1/0.24) \rceil = 3, \qquad \ell_4 = \lceil \log_2(1/0.12) \rceil = 4.$$



Karakter	Kódszó
X_1	11
X_2	01
X_3	001
X_4	0000

1. feladat

Kódoljuk a következő forrást Shannon–Fano kódolással.

$$p_1 = 0.49, \quad p_2 = 0.14, \quad p_3 = 0.14, \quad p_4 = 0.07, \quad p_5 = 0.07,$$
$$p_6 = 0.04, \quad p_7 = 0.02, \quad p_8 = 0.02, \quad p_9 = 0.01$$

1. feladat

Kódoljuk a következő forrást Shannon–Fano kódolással.

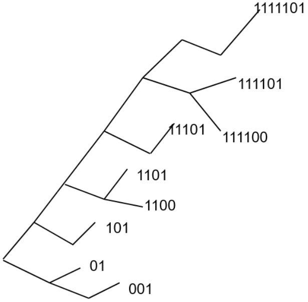
$$p_1 = 0.49, \quad p_2 = 0.14, \quad p_3 = 0.14, \quad p_4 = 0.07, \quad p_5 = 0.07,$$
$$p_6 = 0.04, \quad p_7 = 0.02, \quad p_8 = 0.02, \quad p_9 = 0.01$$

Megoldás. A kódszó hosszak $\ell_i = \lceil \log_2 1/p_i \rceil$, tehát

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \lceil \log_2 1/p_1 \rceil = \lceil 1.029 \rceil = 2, \\
\ell_2 &= \lceil \log_2 1/p_2 \rceil = \lceil 2.836 \rceil = 3, \\
\ell_3 &= \lceil \log_2 1/p_3 \rceil = \lceil 2.836 \rceil = 3, \\
\ell_4 &= \ell_5 = 4, \quad \ell_6 = 5, \quad \ell_7 = \ell_8 = 6, \quad \ell_9 = 7.
\end{aligned}$$

Készítünk egy bináris fát, aminek 9 levele van, és a levelek mélysége éppen ezek az ℓ_i értékek.

1. feladat



Szimbólum	Kódszó
X_1	01
X_2	001
X_3	101
X_4	1100
X_5	1101
X_6	11101
X_7	111100
X_8	111101
X_9	1111101

Megjegyzés: a kód prefix-mentes $\Leftrightarrow$ nincs kódszó semelyik belső csúcson.

2. feladat

Elemezzük az előbbi kód teljesítményét.

2. feladat

Elemezzük az előbbi kód teljesítményét.

Megoldás. A forrás eloszlás entrópiája

$$H(X) = \sum_{i=1}^{9} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = 2.314,$$

míg a kódolás átlagos kódszó hossza

$$\begin{aligned} L =& 0.49 \cdot 2 + 0.28 \cdot 3 + 0.28 \cdot 3 + 0.14 \cdot 4 + \\ & 0.04 \cdot 5 + 0.04 \cdot 6 + 0.01 \cdot 7 = 2.89, \end{aligned}$$

így a kód hatékonysága

$$\frac{H(X)}{L} \approx 0.8.$$

Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$p_1 = 0.37$

$p_2 = 0.27$

$p_3 = 0.24$

$p_4 = 0.12$

Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$p_1 = 0.37$	0.37
$p_2 = 0.27$	0.27
$p_3 = 0.24$	0.36
$p_4 = 0.12$	

Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

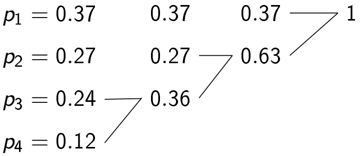
Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

$$
\begin{array}{lll}
p_1 = 0.37 & 0.37 & 0.37 \\
p_2 = 0.27 & 0.27 & 0.63 \\
p_3 = 0.24 & 0.36 & \\
p_4 = 0.12 & &
\end{array}
$$

Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

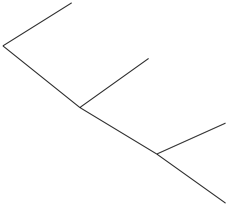


Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

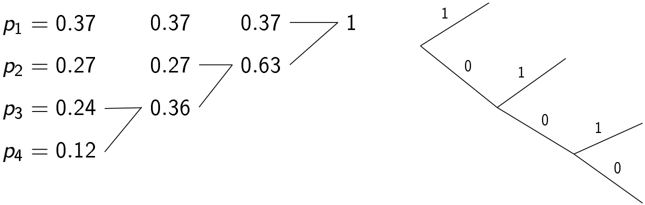
$p_1 = 0.37$	0.37	0.37	1
$p_2 = 0.27$	0.27	0.63	
$p_3 = 0.24$	0.36		
$p_4 = 0.12$			



Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

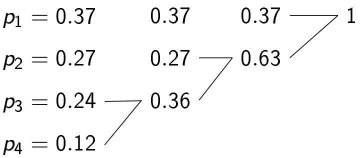
Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$

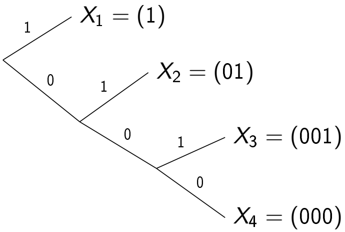


Huffman kódolás

A Huffman kódolás úgy építi a fát, hogy minden lépésben a két legkisebb p_k valószínűséget összevonja. A fa alapján a kódolás ugyanúgy történik, mint a Shannon–Fano kódnál.

Példa. $p_1 = 0.37, \quad p_2 = 0.27, \quad p_3 = 0.24, \quad p_4 = 0.12.$





3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$

$p_2 = 0.14$

$p_3 = 0.14$

$p_4 = 0.07$

$p_5 = 0.07$

$p_6 = 0.04$

$p_7 = 0.02$

$p_8 = 0.02$

$p_9 = 0.01$

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14
$p_3 = 0.14$	0.14
$p_4 = 0.07$	0.07
$p_5 = 0.07$	0.07
$p_6 = 0.04$	0.04
$p_7 = 0.02$	0.02
$p_8 = 0.02$	0.03
$p_9 = 0.01$	

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05
$p_8 = 0.02$	0.03	
$p_9 = 0.01$		

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05	
$p_8 = 0.02$	0.03		
$p_9 = 0.01$			

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.14
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.09
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09	
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05		
$p_8 = 0.02$	0.03			
$p_9 = 0.01$				

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.14	0.23
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.09	
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09		
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05			
$p_8 = 0.02$	0.03				
$p_9 = 0.01$					

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.28
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.23
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.14	0.23	
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.09		
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09			
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05				
$p_8 = 0.02$	0.03					
$p_9 = 0.01$						

3. feladat

Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.28	0.51
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.23	
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.14	0.23		
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.09			
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09				
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05					
$p_8 = 0.02$	0.03						
$p_9 = 0.01$							

3. feladat

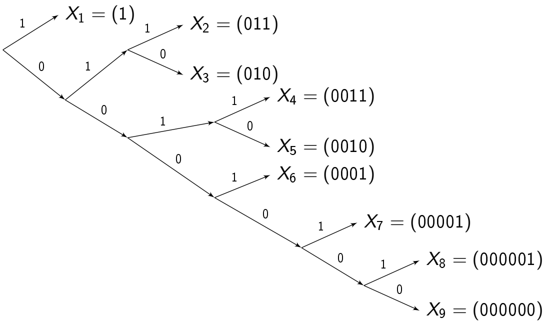
Kódoljuk a 2. feladat forrását Huffman kódolással.

Megoldás. Először az állapotgráfot adjuk meg.

$p_1 = 0.49$	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	1
$p_2 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.28	0.51	
$p_3 = 0.14$	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.23		
$p_4 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.14	0.23			
$p_5 = 0.07$	0.07	0.07	0.07	0.09				
$p_6 = 0.04$	0.04	0.04	0.09					
$p_7 = 0.02$	0.02	0.05						
$p_8 = 0.02$	0.03							
$p_9 = 0.01$								

4. feladat

Ezután a kódfa és a kódszavak táblázata (LUT) következik:



szimbólum	kódszó
X_1	1
X_2	011
X_3	010
X_4	0010
X_5	0011
X_6	0001
X_7	00001
X_8	000001
X_9	000000

4. feladat

Hasonlítsuk össze a Shannon-Fano kódolás és a Huffman kódolás teljesítményét az előző forrásra $f_s = 160$ MHz mintavételi frekvencia esetén.

4. feladat

Hasonlítsuk össze a Shannon-Fano kódolás és a Huffman kódolás teljesítményét az előző forrásra $f_s = 160$ MHz mintavételi frekvencia esetén.

Megoldás.

$$\begin{aligned} L^{HUFF} &= 0.49 \cdot 1 + 0.14 \cdot 3 + 0.14 \cdot 3 + 0.07 \cdot 4 + 0.07 \cdot 4 + \\ &\quad + 0.04 \cdot 4 + 0.02 \cdot 5 + 0.02 \cdot 6 + 0.01 \cdot 6 = 2.33 \text{ (bit)} \\ L^{SF} &= 0.49 \cdot 2 + 0.28 \cdot 3 + 0.14 \cdot 4 + 0.04 \cdot 5 + 0.04 \cdot 6 + \\ &\quad + 0.01 \cdot 7 = 2.89 \text{ (bit)} \end{aligned}$$

Mivel $f_s = 160$ MHz, a ráták

$$R_{HUFF} = 372.8 Mbps, \qquad R_{SF} = 462 Mbps.$$

Megjegyzés: 9 forrás szimbólum $\rightarrow$ adattömörítés nélkül 4 bitre van szükség, és a ráta $R = 640 Mbps$.

5. feladat

Adott egy forrás a következő eloszlással és kódolással:

Forrás szimbólum	Valószínűség	Kódszó
X_1	0.4	0
X_2	0.2	10
X_3	0.2	110
X_4	0.2	1111

(a) Mennyi az átlagos kódhossz?

(b) Mennyi az elméleti alsó korlát a tömöríthetőségre?

(c) Prefix-mentes-e ez a kód?

(d) Optimális-e ez a kód?

5. feladat

Megoldás.

(a) $L = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 = 2.2.$

5. feladat

Megoldás.

(a) $L = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 = 2.2.$

(b)

$$H(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right) = 0.4 \cdot 1.31 + 3 \cdot 0.2 \cdot 2.322 = 1.922$$

$$L - H(X) = 0.278$$

5. feladat

Megoldás.

(a) $L = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 = 2.2.$

(b)

$$H(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) = 0.4 \cdot 1.31 + 3 \cdot 0.2 \cdot 2.322 = 1.922$$

$$L - H(X) = 0.278$$

(c) Igen, a kód prefix-mentes.

5. feladat

Megoldás.

(a) $L = \sum_{i=1}^{4} p_i l_i = 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 = 2.2.$

(b)

$$H(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right) = 0.4 \cdot 1.31 + 3 \cdot 0.2 \cdot 2.322 = 1.922$$

$$L - H(X) = 0.278$$

(c) Igen, a kód prefix-mentes.

(d) Nem, az X_4 kódszavának elég 1111 helyett 111 is (és úgy egyébként pont a Huffman-kódolást kapjuk, ami már optimális).

6. feladat

Vegyük ismét az 1. feladat forrását:

$$p_1 = 0.49, \quad p_2 = 0.14, \quad p_3 = 0.14, \quad p_4 = 0.07, \quad p_5 = 0.07,$$
$$p_6 = 0.04, \quad p_7 = 0.02, \quad p_8 = 0.02, \quad p_9 = 0.01.$$

(a) Tömörítsük a forrást Shannon-Fano-Elias kódolással.

(b) Számítsuk ki az átlagos kódhosszt.

(c) Hasonlítsuk össze a kód teljesítményét ugyanezen forrás Shannon-Fano kódolásával és Huffman kódolásával is $f_s = 160$ MHz mintavételi frekvencia mellett.

6. feladat

Megoldás.

(a)

i	p_i	$F(i)$	$\bar{F}(i)$	bináris	ℓ_i	kódszó
1	0.49	0	0.245	0.0011111010...	3	001
2	0.14	0.49	0.56	0.1000111101...	4	1000
3	0.14	0.63	0.7	0.1011001100...	4	1011
4	0.07	0.77	0.805	0.1100111000...	5	11001
5	0.07	0.84	0.875	0.1110000000...	5	11100
6	0.04	0.91	0.93	0.1110111000...	6	111011
7	0.02	0.95	0.96	0.1111010111...	7	1111010
8	0.02	0.97	0.98	0.1111101011...	7	1111101
9	0.01	0.99	0.995	0.1111111010...	8	11111110

$$F(i) = \sum_{j=0}^{i-1} p_j, \quad \bar{F}(i) = F(i) + p_i/2, \quad \ell_i = \lceil \log_2 (1/p_i) \rceil + 1$$

6. feladat

(b) Az átlagos kódhossz

$$L^{SFE} = 0.49 \cdot 3 + 0.14 \cdot 4 + 0.14 \cdot 4 + 0.07 \cdot 5 + 0.07 \cdot 5 + \\ + 0.04 \cdot 6 + 0.02 \cdot 7 + 0.02 \cdot 7 + 0.01 \cdot 8 = 3.89.$$

6. feladat

(b) Az átlagos kódhossz

$$L^{SFE} = 0.49 \cdot 3 + 0.14 \cdot 4 + 0.14 \cdot 4 + 0.07 \cdot 5 + 0.07 \cdot 5 + \\ + 0.04 \cdot 6 + 0.02 \cdot 7 + 0.02 \cdot 7 + 0.01 \cdot 8 = 3.89.$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} L^{HUFF} = 2.33 & L^{SF} = 2.89 & L^{SFE} = 3.89 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ R_{HUFF} = 372.8Mbps & R_{SF} = 462Mbps & R_{SFE} = 622Mbps \end{array}$$

Emlékeztető: kódolás nélkül $R = 640Mbps$.

Konklúzió: az L átlagos kódhosszban elért kis javulás is sokat számít az adatsebességben!

Összehasonlító elemzés

teljesítmény $f_s = 160$ MHz alg. egyszerűség

Kódolás	Teljesítmény	Átl. kódhossz	Adatseb.	Komplexitás
Huffman	L optimális	2.33	$372.8 Mbps$	keresés + fa
SF	$H(X) < L < H(X) + 1$	2.89	$462.4 Mbps$	fa
SFE	$H(X) + 1 < L < H(X) + 2$	3.89	$622.4 Mbps$	bináris konverzió

7. feladat

Egy memóriamentes, időben homogén forrásnak a következő az eloszlása:

$$p_1 = 0.7, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.1.$$

(a) Adjuk meg az elméleti alsó korlátot az átlagos kódhosszra.

(b) Számítsuk ki az átlagos kódhosszt Huffman kódolás esetén.

(c) Mennyi az átlagos kódhossz, ha a forrást Shannon-Fano kódolással tömörítjük?

7. feladat

Egy memóriamentes, időben homogén forrásnak a következő az eloszlása:

$$p_1 = 0.7, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.1.$$

(a) Adjuk meg az elméleti alsó korlátot az átlagos kódhosszra.
(b) Számítsuk ki az átlagos kódhosszt Huffman kódolás esetén.
(c) Mennyi az átlagos kódhossz, ha a forrást Shannon-Fano kódolással tömörítjük?

7. feladat

Megoldás.

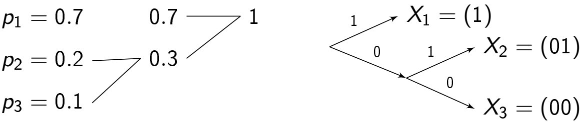
(a) $H(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i \log_2(1/p_i) = 0.3598 + 0.464 + 0.3321 = 1.1559$.

7. feladat

Megoldás.

(a) $H(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i \log_2(1/p_i) = 0.3598 + 0.464 + 0.3321 =$ 1.1559.

(b)



X_1	1
X_2	01
X_3	00

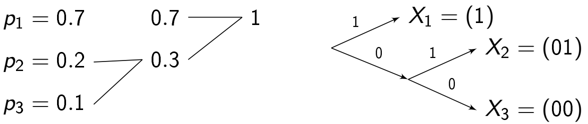
$$L_{HUFF} = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 1.3.$$

7. feladat

Megoldás.

(a) $H(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i \log_2(1/p_i) = 0.3598 + 0.464 + 0.3321 = \color{red}{1.1559}$.

(b)



X_1	1
X_2	01
X_3	00

$$L_{HUFF} = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = \color{red}{1.3}.$$

(c) $L_{SF} = \lceil \log_2(1/p_1) \rceil \cdot p_1 + \lceil \log_2(1/p_2) \rceil \cdot p_2 + \lceil \log_2(1/p_3) \rceil \cdot p_3 = 0.7 \cdot 1 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 = \color{red}{1.7}$.

Aritmetikai kódolás

A Shannon–Fano–Elias kódolás azért volt gyenge, mert a $\lfloor . \rfloor + 1$ függvényt minden egyes karakterre külön alkalmaztuk. Az aritmetikai kódolás (AC) ugyanarra az ötletre épül, de a teljes üzenetet kódolja egyszerre.

Példa. Legyen az ábécé {A,B,C,D}, és

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.1.$$

Aritmetikai kódolás

A Shannon–Fano–Elias kódolás azért volt gyenge, mert a $\lfloor . \rfloor + 1$ függvényt minden egyes karakterre külön alkalmaztuk. Az aritmetikai kódolás (AC) ugyanarra az ötletre épül, de a teljes üzenetet kódolja egyszerre.

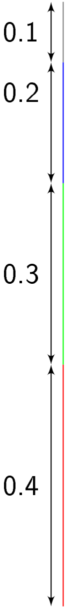
Példa. Legyen az ábécé {A,B,C,D}, és

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.2, \quad P(D) = 0.1.$$

Az aritmetikai kódolásnál az üzenetnek először a $[0, 1]$ egy részintervalluma, majd azon belül egyetlen pontnak megfelelő bitsorozat lesz a kódszó.

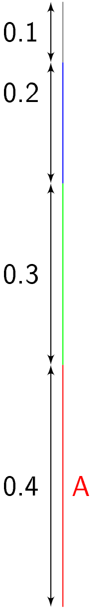
Aritmetikai kódolás – példa

üzenet: ABAC



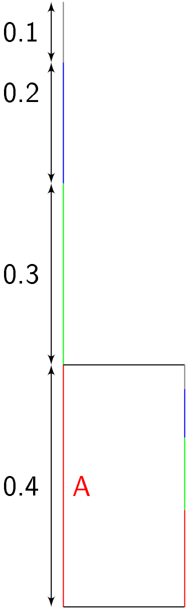
Aritmetikai kódolás – példa

üzenet: ABAC



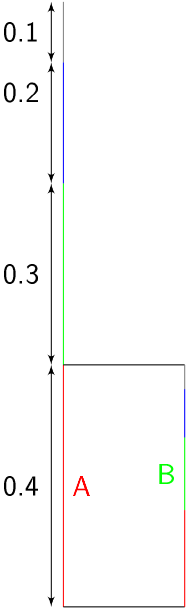
Aritmetikai kódolás – példa

üzenet: ABAC

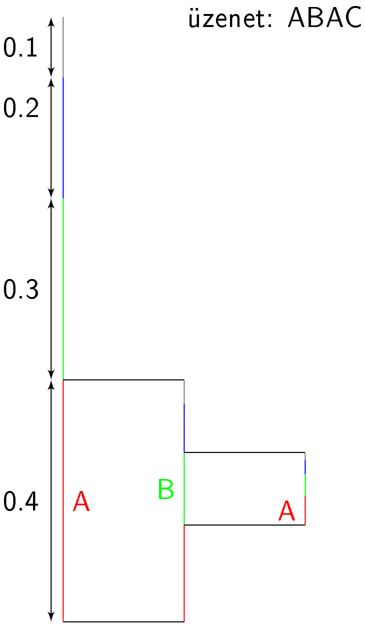


Aritmetikai kódolás – példa

üzenet: ABAC

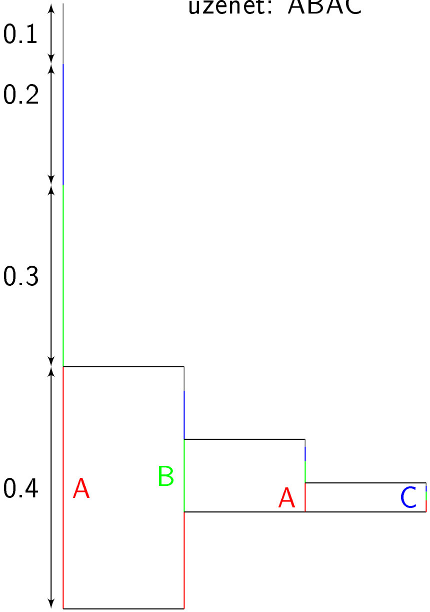


Aritmetikai kódolás – példa

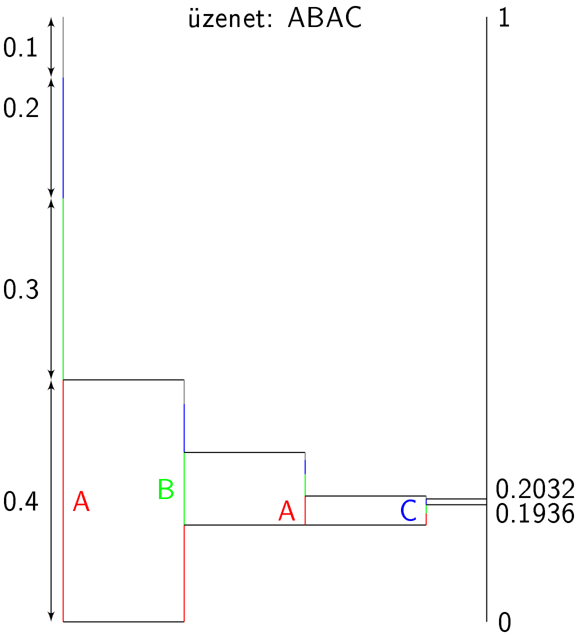


Aritmetikai kódolás – példa

üzenet: ABAC



Aritmetikai kódolás – példa



Aritmetikai kódolás – példa

Az ABAC üzenetnek megfelelő intervallum: $[0.1936, 0.2032]$.

Az intervallum felezőpontját használjuk (bináris alakban) tömörített üzenetként:

$$0.1984 = 0.00110010110\ldots_{②}$$

Aritmetikai kódolás – példa

Az ABAC üzenetnek megfelelő intervallum: $[0.1936, 0.2032]$.

Az intervallum felezőpontját használjuk (bináris alakban) tömörített üzenetként:

$$0.1984 = 0.00110010110\ldots_{②}$$

A fő kérdés: hány bit pontosságra van szükség, hogy meg tudjuk különböztetni ezt az intervallumot a többi kis intervallumtól?

Aritmetikai kódolás – példa

A szükséges bitek száma

$$\lceil -\log_2(P(A)P(B)P(A)P(C)) \rceil + 1 = 8,$$

mivel ekkor a kerekítési hiba kevesebb, mint $P(A)P(B)P(A)P(C)/2$, tehát még a kerekített érték is az intervallumon belülre esik:

$$0.1936 = 0.00110001100\ldots$$
$$0.1984 \approx 0.00110011$$
$$0.2032 = 0.00110100000\ldots$$

Aritmetikai kódolás

Az AC nem karakterkódolás, tehát lehet hatékonyabb, mint a Huffman kód. És tényleg az is: hosszú üzenetekre a tömörítési ráta aszimptotikusan az elméleti alsó korláthoz tart: egy $C_1 \ldots C_n$ karaktersorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left\lceil -\log_2\left(\prod_{i=1}^{n} P(C_i)\right)\right\rceil + 1\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log_2\left(\prod_{i=1}^{n} P(C_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_2 P(C_i) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log_2(1/p_k) = H(X)$$

a Nagy Számok Törvénye alapján.

Aritmetikai kódolás

Az AC nem karakterkódolás, tehát lehet hatékonyabb, mint a Huffman kód. És tényleg az is: hosszú üzenetekre a tömörítési ráta aszimptotikusan az elméleti alsó korláthoz tart: egy $C_1 \dots C_n$ karaktersorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left\lceil -\log_2\left(\prod_{i=1}^{n} P(C_i)\right)\right\rceil + 1\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log_2\left(\prod_{i=1}^{n} P(C_i)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_2 P(C_i) = \sum_{k=1}^{K} p_k \log_2(1/p_k) = H(X)$$

a Nagy Számok Törvénye alapján.

Az AC kicsomagolható online: a tömörített üzenet elejének ismeretében már el tudjuk kezdeni a kicsomagolást, majd ahogy újabb szakaszok érkeznek a tömörített üzenetből, haladhatunk tovább a kicsomagolással.