1. Markov-láncok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/09/04

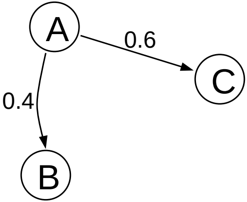
1. Definíció, bevezetés
2. Strukturális tulajdonságok
3. Hosszú távú viselkedés
4. Reducibilis Markov-láncok
5. Periodikus Markov-láncok
6. Stacionárius vektor jelentései
7. Ergodtétel
8. Speciális szerkezetű Markov-láncok

Véletlenszerűen változó rendszer

Egy rendszer elindul egy A állapotból.

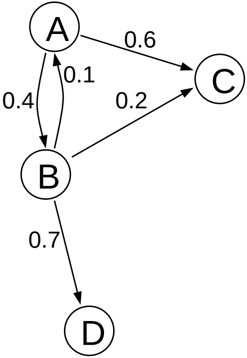
Véletlenszerűen változó rendszer

Ezután B vagy C állapotba léphet (0.4 és 0.6 valószínűséggel).



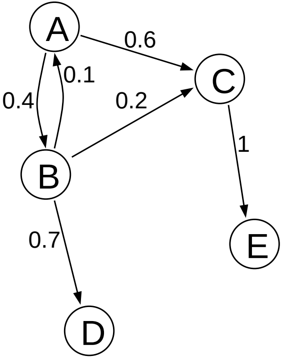
Véletlenszerűen változó rendszer

B-ből A, C, D valamelyikébe léphet véletlenszerűen.



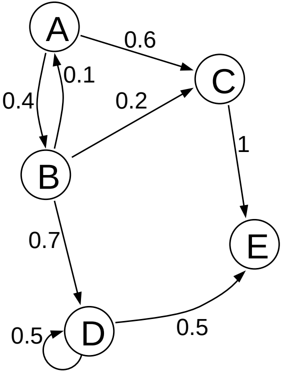
Véletlenszerűen változó rendszer

C-ből csak E-be léphet.



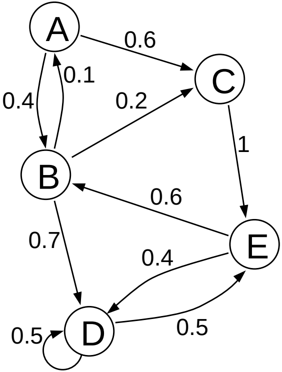
Véletlenszerűen változó rendszer

D-ből átléphet E-be vagy maradhat D-ben is.

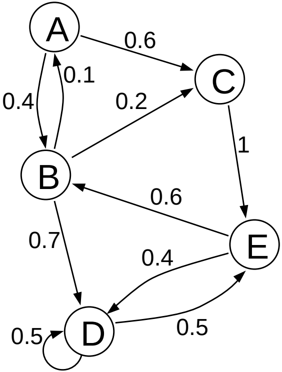


Véletlenszerűen változó rendszer

Ez egy Markov-lánc.



Egy lehetséges realizáció



Egy lehetséges realizáció: A, B, D, D, E, D, E, B, C, E, B, A, C ...

Markov-lánc

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

Markov-lánc

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

A Markov tulajdonság egyfajta memóriamentesség: a rendszer további viselkedéséhez nem kell ismerni a múltat, csak a jelenlegi állapotot.

Markov-lánc

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

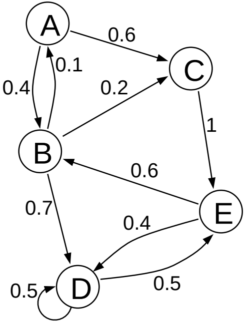
A Markov tulajdonság egyfajta memóriamentesség: a rendszer további viselkedéséhez nem kell ismerni a múltat, csak a jelenlegi állapotot.

Egy Markov-lánc megadásához a következő információkra van szükség:

- állapotok listája (pl. A, B, C, D, E),
- kezdeti állapot, és
- vagy egy irányított gráf, átmenetvalószínűségekkel az éleken (mint az előző példában), vagy egy P *átmenet-valószínűség mátrix*.

Átmenet-valószínűség mátrix

A P mátrix (i,j) eleme annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc a j állapotba lép következőnek, feltéve, hogy most az i állapotban van.



	A	B	C	D	E
A	0	0.4	0.6	0	0
B	0.1	0	0.2	0.7	0
C	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0.5	0.5
E	0	0.6	0	0.4	0

Sztochasztikus mátrix

A P átmenet-valószínűség mátrix tulajdonságai:

- elemei nemnegatívak:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j,$$

- minden egyes sor összege 1:

$$\sum_i p_{ij} = 1.$$

Sztochasztikus mátrix

A P átmenet-valószínűség mátrix tulajdonságai:

- elemei nemnegatívak:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j,$$

- minden egyes sor összege 1:

$$\sum_i p_{ij} = 1.$$

Bármely mátrix, ami a fenti tulajdonságokat teljesíti, egy alkalmas átmenet-valószínűség mátrix. A fenti tulajdonságokat teljesítő négyzetes mátrixokat *sztochasztikus mátrixnak* nevezzük.

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a kezdeti állapot lehet véletlenszerű is, pl.

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy a Markov-lánc A-ból vagy C-ből indul 1/2 valószínűséggel.

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a kezdeti állapot lehet véletlenszerű is, pl.

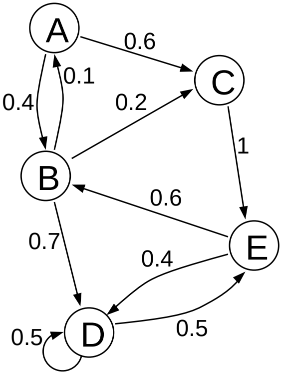
$$v_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy a Markov-lánc A-ból vagy C-ből indul $1/2$ valószínűséggel.

v_0 elemei nemnegatívak, összegük 1.

Állapot-valószínűségek

Tegyük fel, hogy a Markov-lánc A-ból indul. Hol lehet 1 lépés után? És 2 lépés után?



Állapot-valószínűségek

1 lépés után az állapot véletlenszerű. A példában lehet B 0.4 valószínűséggel vagy C 0.6 valószínűséggel, azaz az állapotvektor 1 lépés után

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Állapot-valószínűségek

1 lépés után az állapot véletlenszerű. A példában lehet B 0.4 valószínűséggel vagy C 0.6 valószínűséggel, azaz az állapotvektor 1 lépés után

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 lépés utáni lehetőségek:

- A→B→A $0.4 \cdot 0.1$ valószínűséggel, vagy
- A→B→C $0.4 \cdot 0.2$ valószínűséggel, vagy
- A→B→D $0.4 \cdot 0.7$ valószínűséggel, vagy
- A→C→E $0.6 \cdot 1$ valószínűséggel.

Tehát

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Állapot-valószínűségek

Általában v_n a következő módon számítható ki.

Lemma

$$v_n = v_{n-1} \cdot P = v_0 \cdot P^n$$

Állapot-valószínűségek

Általában v_n a következő módon számítható ki.

Lemma

$$v_n = v_{n-1} \cdot P = v_0 \cdot P^n$$

Biz (vázlat). A $v_{n-1} \cdot P$ szorzat a teljes valószínűség tétele alapján számítja ki az n lépés utáni állapot-valószínűségeket az $n-1$ lépés utáni állapot-valószínűségek szerint.

Állapot-valószínűségek

Például a

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kezdeti vektorra és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixra

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

és

$$v_2 = v_1 \cdot P = v_0 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Mátrix-szorzás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrix-szorzás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

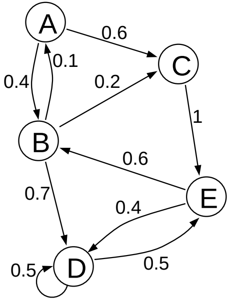
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}$$

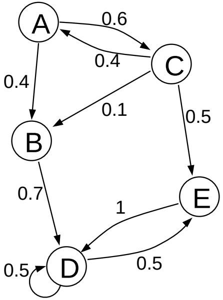
Kapcsolati osztályok

Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.

Kapcsolati osztályok

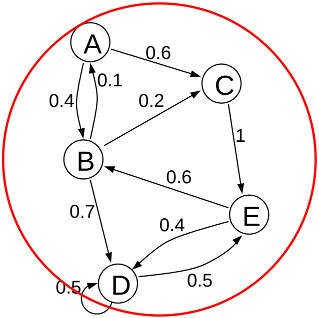
Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.

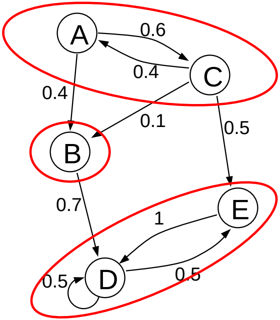




Kapcsolati osztályok

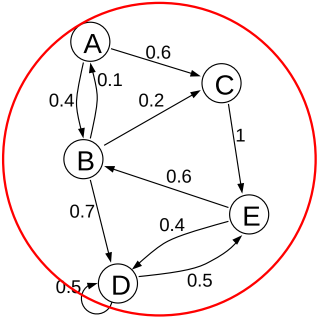
Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.

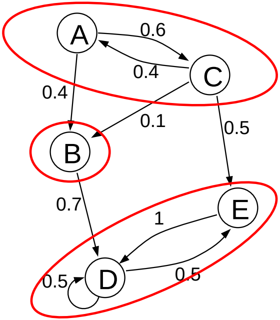




Irreducibilis és reducibilis Markov-láncok

Ha egy Markov-láncnak egyetlen osztálya van, vagy egyszerűen mondva bárhonnan bárhová el lehet jutni, akkor *irreducibilis*. Ha több kapcsolati osztály is van, akkor *reducibilis*.

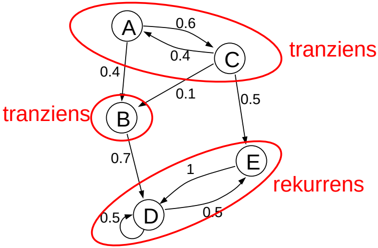




Rekurrens és tranziens osztályok

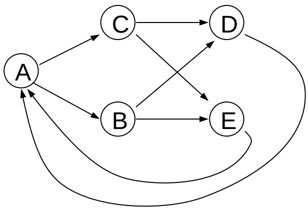
Az olyan osztályok, amelyekből semmilyen átmenet nem vezet ki, *rekurrens osztályok*, és a bennük lévő állapotok *rekurrens állapotok*.

Az olyan osztályok, ahonnan legalább egy átmenet kivezet, *tranziens osztályok*, és a bennük lévő állapotok *tranziens állapotok*.



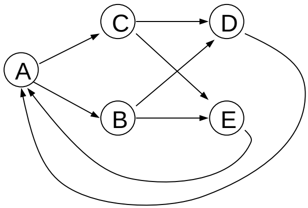
Periodicitás

Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Periodicitás

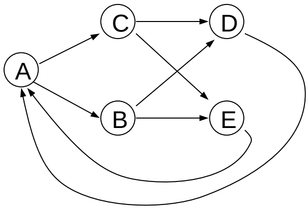
Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Igen, irreducibilis. Bármelyik állapotból bármelyik másikba el lehet jutni.

Periodicitás

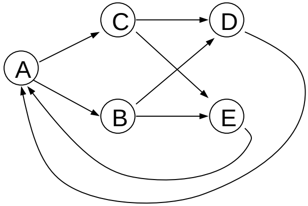
Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Igen, irreducibilis. Bármelyik állapotból bármelyik másikba el lehet jutni.

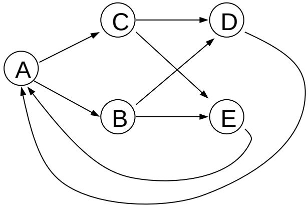
Az A állapotból indulva hány lépés múlva juthatunk vissza megint az A állapotba?

Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,. . . lépés múlva.

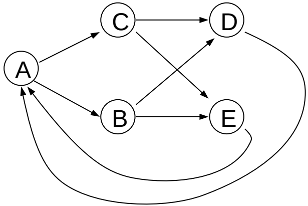
Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,... lépés múlva.

A B állapotból indulva a B állapotba visszatérés is 3, 6, 9,... lépés múlva lehetséges.

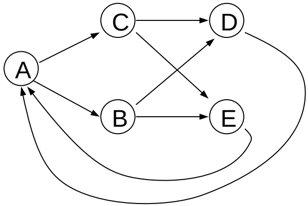
Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,. . . lépés múlva.

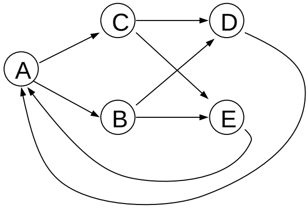
A B állapotból indulva a B állapotba visszatérés is 3, 6, 9,. . . lépés múlva lehetséges. Sőt, ez igaz bármelyik állapotra.

Periodicitás



Ha egy irreducibilis Markov-láncban az A állapotból indulva ugyanoda csak valamely $d > 1$ többszöröse számú lépésben lehet visszajutni, akkor a Markov-lánc *periodikus d periódussal*. A periódus ugyanakkora az összes állapotra.

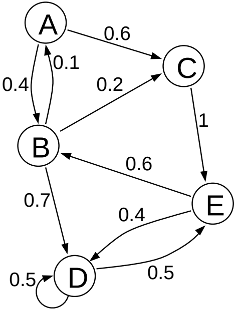
Periodicitás



Ha egy irreducibilis Markov-láncban az A állapotból indulva ugyanoda csak valamely $d > 1$ többszöröse számú lépésben lehet visszajutni, akkor a Markov-lánc *periodikus d periódussal*. A periódus ugyanakkora az összes állapotra.

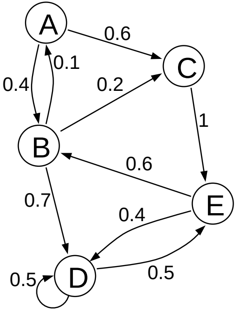
A fenti példa Markov-lánc periodikus, a periódus hossza 3.

Periodicitás



A fenti Markov-láncban D-ből indulva visszatérhetünk D-be 1, vagy 2, vagy 3 stb. lépésben is. Ez egy *aperiodikus* Markov-lánc.

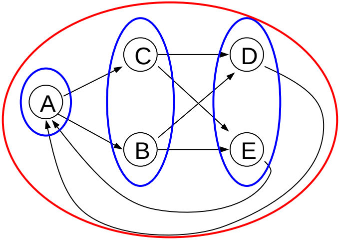
Periodicitás



A fenti Markov-láncban D-ből indulva visszatérhetünk D-be 1, vagy 2, vagy 3 stb. lépésben is. Ez egy *aperiodikus* Markov-lánc.

(Az aperiodikus esetre gondolhatunk úgy is, hogy $d = 1$.)

Periodicitás



Egy periodikus Markov-láncban az állapotok feloszthatóak d *periodicitási osztályra*. Ezek nem ugyanazok, mint a kapcsolati osztályok! A fenti Markov-lánc irreducibilis, egyetlen kapcsolati osztályból áll (ami minden állapotot tartalmaz), ugyanakkor 3 periodicitási osztályból áll.

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

2 állapot van: esős és napos. Az átmenet-valószínűség mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

2 állapot van: esős és napos. Az átmenet-valószínűség mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ma esik, tehát

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.628 & 0.372 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.628 & 0.372 \end{pmatrix}.$$

Úgy néz ki, mintha konvergálnának. Vajon hová?

Stacionárius eloszlás

$v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_k \,)$ *stacionárius vektor* vagy *stacionárius eloszlás*, ha

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}}\,,$$

$x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ és

$$x_1 + \cdots + x_k = 1.$$

Stacionárius eloszlás

$v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \;\, x_2 \;\, \ldots \;\, x_k \,)$ *stacionárius vektor* vagy *stacionárius eloszlás*, ha

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}}\,,$$

$x_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ és

$$x_1 + \cdots + x_k = 1.$$

Ha egy Markov-láncot $v_0 = v_{\mathrm{st}}$-ből indítunk, akkor

$$v_1 = v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}}$$

és így tovább, tehát

$$v_n = v_{\mathrm{st}} \quad \forall n.$$

Egy Markov-lánc stacionárius, ha stacionárius vektorból indul.

Hosszú távú viselkedés

Tétel. (Perron–Frobenius)

(a) *Minden (véges állapotterű) Markov-láncnak van legalább egy stacionárius vektora.*

(b) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű és elemei szigorúan pozitívak.*

(c) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{st}$$

tetszőleges v_0 kezdeti vektorra.

Hosszú távú viselkedés

Tétel. (Perron–Frobenius)

(a) *Minden (véges állapotterű) Markov-láncnak van legalább egy stacionárius vektora.*

(b) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű és elemei szigorúan pozitívak.*

(c) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{st}$$

tetszőleges v_0 kezdeti vektorra.

Nem biz., de a lényeg: a stacionárius vektor a P mátrix 1 sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora; az összes többi sajátérték a (b) esetben legfeljebb 1 abszolútértékű, a (c) esetben szigorúan kisebb, mint 1 abszolútértékű.

Példa

Ha

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

akkor $v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$-re teljesül a definíció alapján

$$\begin{aligned} 0.7x_1 + 0.5x_2 &= x_1 \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 &= x_2 \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

Példa

Ha

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

akkor $v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \;\; x_2 \,)$-re teljesül a definíció alapján

$$\begin{aligned} 0.7x_1 + 0.5x_2 &= x_1 \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 &= x_2 \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

aminek a megoldása $x_1 = 5/8 = 0.625$ és $x_2 = 3/8 = 0.375$, és így

$$v_{\mathrm{st}} = (\, 0.625 \;\; 0.375 \,).$$

A stacionárius eloszlás kiszámítása

A stacionárius eloszlás kiszámításához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{st}} \cdot P &= v_{\mathrm{st}}, \\ x_1 + \cdots + x_k &= 1. \end{aligned}$$

A stacionárius eloszlás kiszámítása

A stacionárius eloszlás kiszámításához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}},$$
$$x_1 + \cdots + x_k = 1.$$

Az általános, mindig használható módszer a Gauss-elimináció. (Speciális esetekben esetleg egyszerűbben is megoldható.)

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v_{\mathrm{st}}.$$

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{\mathrm{st}}.$$

A konvergencia exponenciálisan gyors (nem biz., de a P mátrix második legnagyobb abszolútértékű sajátértéke az exponens); kis állapottér ($k \leq 5$ körül) általában már $n \geq 10$ esetén jó közelítéssel

$$v_n \approx v_{\mathrm{st}}.$$

Nagy állapottér esetén általában nehéz kérdés, hogy mikortól teljesül; kulcsszó: Markov chain mixing time.

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{\mathrm{st}}.$$

A konvergencia exponenciálisan gyors (nem biz., de a P mátrix második legnagyobb abszolútértékű sajátértéke az exponens); kis állapottér ($k \leq 5$ körül) általában már $n \geq 10$ esetén jó közelítéssel

$$v_n \approx v_{\mathrm{st}}.$$

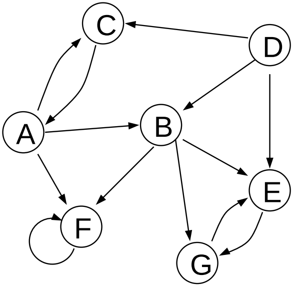
Nagy állapottér esetén általában nehéz kérdés, hogy mikortól teljesül; kulcsszó: Markov chain mixing time.

A Perron–Frobenius tétel (c) része ekvivalens a következővel:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix}.$$

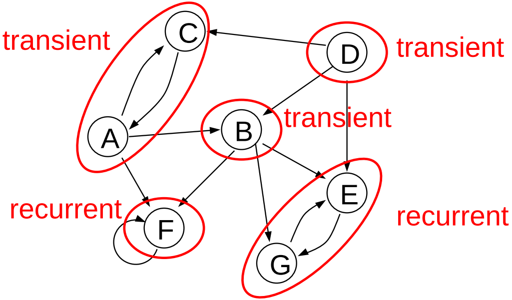
Reducibilis Markov-láncok

Bármely reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb eljut az egyik rekurrens osztályba és ott marad örökre.



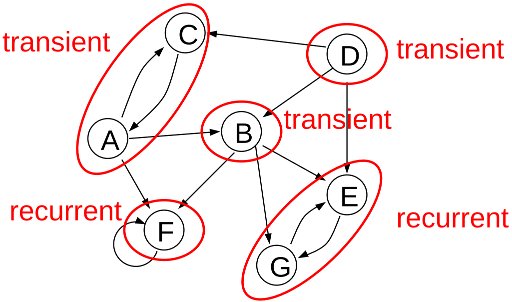
Reducibilis Markov-láncok

Bármely reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb eljut az egyik rekurrens osztályba és ott marad örökre.



Reducibilis Markov-láncok

Tulajdonképpen minden egyes rekurrens osztály egy kisebb, irreducibilis Markov-láncnak tekinthető.



Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Egy reducibilis Markov-láncra is teljesül, hogy v_n konvergál valamelyik stacionárius vektorhoz – de hogy melyikhez, az lehet véletlenszerű is.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Egy reducibilis Markov-láncra is teljesül, hogy v_n konvergál valamelyik stacionárius vektorhoz – de hogy melyikhez, az lehet véletlenszerű is.

Mi általában irreducibilis Markov-láncokra szorítkozunk.

Stacionárius vektor további értelmezései

Egy irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra

$$v_n \to v_{\mathrm{st}}$$

tetszőleges v_0 esetén. Ez azt jelenti, hogy hosszú távon a Markov-lánc „elfelejti” a kezdeti állapotot, és közel lesz a stacionárius állapothoz. Emiatt sok esetben, amikor a Markov-lánc hosszú ideje zajlik, a kezdeti állapot irreleváns, mivel a Markov-lánc úgyis stacionárius lesz.

Stacionárius vektor további értelmezései

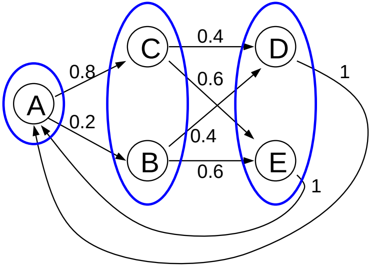
Egy irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra

$$v_n \to v_{\mathrm{st}}$$

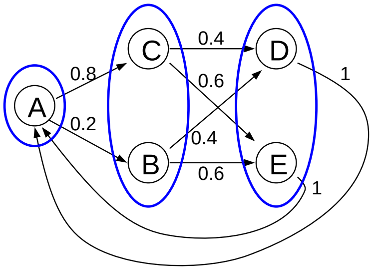
tetszőleges v_0 esetén. Ez azt jelenti, hogy hosszú távon a Markov-lánc „elfelejti" a kezdeti állapotot, és közel lesz a stacionárius állapothoz. Emiatt sok esetben, amikor a Markov-lánc hosszú ideje zajlik, a kezdeti állapot irreleváns, mivel a Markov-lánc úgyis stacionárius lesz.

Mi a helyzet irreducibilis, periodikus Markov-láncokra?

Periodikus Markov-láncok

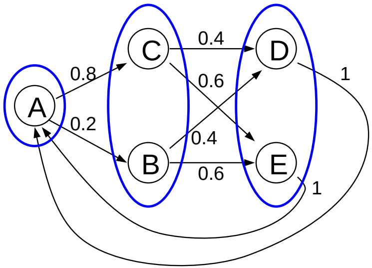


Periodikus Markov-láncok



Egy lehetséges realizáció: A, C, D, A, C, E, A, B, E, A, C, E, A, ...

Periodikus Markov-láncok



Egy lehetséges realizáció: A, C, D, A, C, E, A, B, E, A, C, E, A, . . .

Minden harmadik állapot A, utána mindig B vagy C, azután pedig D vagy E következik.

Periodikus Markov-láncok

Egy irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_{st} egyértelmű. A fenti Markov-láncra

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Periodikus Markov-láncok

Egy irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_{st} egyértelmű. A fenti Markov-láncra

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Ha a periódus d, v_{st} $\frac{1}{d}$ valószínűséget rendel minden egyes periodicitási osztályhoz:

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \underbrace{\frac{1}{15} \quad \frac{4}{15}}_{\frac{1}{3}} & \underbrace{\frac{14}{75} \quad \frac{11}{75}}_{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

Periodikus Markov-láncok

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

Periodikus Markov-láncok

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \ldots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Periodikus Markov-láncok

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \ldots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Teljesül a következő: nagy n-re, v_n értéke közelítőleg v_{st}, *feltéve, hogy abban a periodicitási osztályban van, ahol n lépés után lehet*.

Periodikus Markov-láncok

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \ldots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Teljesül a következő: nagy n-re, v_n értéke közelítőleg v_{st}, *feltéve, hogy abban a periodicitási osztályban van, ahol n lépés után lehet.*

Ez a feltételes eloszlás megkapható úgy is, hogy v_{st} többi osztálybeli elemeit kinullázzuk, majd beszorozzuk d-vel.

Periodikus Markov-láncok

A korábbi periodikus Markov-lánc példájára $d = 3$, és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Ha a Markov-lánc az 1-es állapotból indult, akkor $3n$ lépés után csak az 1-es állapotban lehet, és

$$v_{3n} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \overset{0}{\cancel{\frac{1}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{4}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{14}{75}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{11}{75}}} \end{pmatrix} = (\,1\ 0\ 0\ 0\ 0\,).$$

$3n + 1$ lépés után csak a 2-es periodicitási osztályban lehet, és

$$v_{3n+1} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \overset{0}{\cancel{\frac{14}{75}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{11}{75}}} \end{pmatrix} = (\,0\ \tfrac{1}{5}\ \tfrac{4}{5}\ 0\ 0\,).$$

Periodikus Markov-láncok

$3n + 2$ lépés után pedig csak a 3-as periodicitási osztályban lehet, és így

$$v_{3n+2} \approx 3 \cdot \left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} \quad \overset{0}{\cancel{\frac{1}{15}}} \quad \overset{0}{\cancel{\frac{4}{15}}} \quad \frac{14}{75} \quad \frac{11}{75} \right) = \left(0 \; 0 \; 0 \; \frac{14}{25} \; \frac{11}{25} \right).$$

Periodikus Markov-láncok

$3n+2$ lépés után pedig csak a 3-as periodicitási osztályban lehet, és így

$$v_{3n+2} \approx 3 \cdot \left(\cancelto{0}{\frac{1}{3}} \;\; \cancelto{0}{\frac{1}{15}} \;\; \cancelto{0}{\frac{4}{15}} \;\; \frac{14}{75} \;\; \frac{11}{75} \right) = \left(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{14}{25} \;\; \frac{11}{25} \right).$$

Ha a Markov-lánc a 2-es periodicitási osztályból indult, akkor $3n$ lépés után csak a 2-es periodicitási osztályban lehet, tehát ilyenkor

$$v_{3n} \approx 3 \cdot \left(\cancelto{0}{\frac{1}{3}} \;\; \frac{1}{15} \;\; \frac{4}{15} \;\; \cancelto{0}{\frac{14}{75}} \;\; \cancelto{0}{\frac{11}{75}} \right) = \left(0 \;\; \frac{1}{5} \;\; \frac{4}{5} \;\; 0 \;\; 0 \right).$$

Hasonlóan

$$v_{3n+1} \approx 3 \cdot \left(\cancelto{0}{\frac{1}{3}} \;\; \cancelto{0}{\frac{1}{15}} \;\; \cancelto{0}{\frac{4}{15}} \;\; \frac{14}{75} \;\; \frac{11}{75} \right) = \left(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{14}{25} \;\; \frac{11}{25} \right),$$

stb.; a közelítés módja tolódik a kezdeti osztálynak megfelelően.

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = \left(x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k \right).$$

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = (\, x_1\, x_2\, \ldots\, x_k \,).$$

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén hosszú távon az i állapotban töltött lépések aránya az összeshez képest x_i.

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k \,).$$

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén hosszú távon az i állapotban töltött lépések aránya az összeshez képest x_i.

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén az átlagos lépésszám két i-be történő visszatérés között $\frac{1}{x_i}$.

Mindkét lemma érvényes periodikus és aperiodikus Markov-láncokra is.

Stacionárius vektor értelmezések

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \ldots$$

Stacionárius vektor értelmezések

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \ldots$$

Az első lemma azt mondja, hogy hosszú távon az 1-esek, azaz az esős napok aránya $x_1 = 0.625$.

Stacionárius vektor értelmezések

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \dots$$

Az első lemma azt mondja, hogy hosszú távon az 1-esek, azaz az esős napok aránya $x_1 = 0.625$.

A második lemma azt mondja, hogy az átlagos lépésszám két 1-es között (vagyis az, hogy átlagosan hány naponta esik) $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{0.625} = 1.6$.

Ergodtétel

Tétel. (Ergodtétel)

Jelölje egy Markov-lánc realizációját (az állapotok sorozatát)

$$X_1, X_2, \ldots$$

Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor bármilyen, az állapotokon adott f függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n)}{n} = \mathbb{E}_{st}(f),$$

ahol

$$\mathbb{E}_{st}(f) = x_1 f(1) + \cdots + x_k f(k),$$

ahol

$$v_{st} = (\, x_1 \;\ldots\; x_k \,).$$

Példa

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Példa

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Az állapotok ismét 1: esős és 2: napos. Legyen az f függvény

$$f(1) = 120, \qquad f(2) = 800.$$

Példa

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Az állapotok ismét 1: esős és 2: napos. Legyen az f függvény

$$f(1) = 120, \qquad f(2) = 800.$$

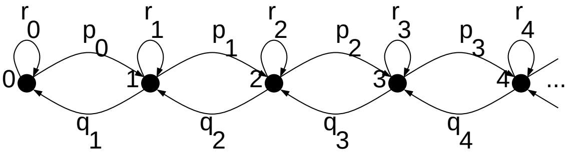
Ekkor az ergodtétel pont azt mondja, hogy a hosszú távú átlagos napi bevétel a fagyiból

$$\mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f) = x_1 f(1) + x_2 f(2) = 0.625 \cdot 120 + 0.375 \cdot 800 = 375$$

(font per nap).

Születési-halálozási folyamat

Megvizsgáljuk Markov-láncok egy osztályát, amiknek speciális szerkezete van. Ha a Markov-lánc állapotai $0, 1, 2 \ldots$, és átmenetek csak legfeljebb 1 távolságra lévő állapotok között történhetnek, akkor ez egy *születési-halálozási* folyamat.



Az állapotok száma lehet véges vagy végtelen. Általában p_i jelöli az $i \to i+1$ átmenet valószínűségét, q_i az $i \to i-1$ átmenet valószínűségét és r_i az $i \to i$ átmenet valószínűségét.

Születési-halálozási folyamat

Ha $p_i > 0, q_i > 0 \forall i$, akkor a születési-halálozási folyamat irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a Perron-Frobenius tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Születési-halálozási folyamat

Ha $p_i > 0, q_i > 0 \forall i$, akkor a születési-halálozási folyamat irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a Perron-Frobenius tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Ha az állapottér végtelen, akkor a helyzet nem ilyen egyszerű. Ilyenkor előrdulhat, hogy v_{st} nem is létezik.

Születési-halálozási folyamat

Ha $p_i > 0, q_i > 0 \forall i$, akkor a születési-halálozási folyamat irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a Perron-Frobenius tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Ha az állapottér végtelen, akkor a helyzet nem ilyen egyszerű. Ilyenkor előrdulhat, hogy v_{st} nem is létezik.

Viszont a következő tétel minden születési-halálozási folyamatra teljesül.

Tétel. (Dinamikus egyensúly egyenletek)

Bármely (véges vagy végtelen állapotterű) születési-halálozási folyamatra, ha $(x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$ *stacionárius eloszlás, akkor*

$$x_i p_i = x_{i+1} q_{i+1}.$$

Születési-halálozási folyamat

Biz. Az i és $i+1$ állapotok közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a hosszútávú gyakorisága meg kell, hogy egyezzen. A balról jobbra átlépés gyakorisága $x_i p_i$, a jobbról balra átlépés gyakorisága $x_{i+1} q_{i+1}$.

Végtelen sor esetén számítsuk ki a stacionárius eloszlást a dinamikus egyensúly egyenletekből.

$$x_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} \cdot x_i,$$

Születési-halálozási folyamat

Biz. Az i és $i+1$ állapotok közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a hosszútávú gyakorisága meg kell, hogy egyezzen. A balról jobbra átlépés gyakorisága $x_i p_i$, a jobbról balra átlépés gyakorisága $x_{i+1} q_{i+1}$.

Végtelen sor esetén számítsuk ki a stacionárius eloszlást a dinamikus egyensúly egyenletekből.

$$x_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{p_0}{q_1} x_0, \qquad x_2 = \frac{p_1}{q_2} x_1 = \frac{p_0 p_1}{q_1 q_2} x_0$$

stb.

Születési-halálozási folyamat

Biz. Az i és $i+1$ állapotok közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a hosszútávú gyakorisága meg kell, hogy egyezzen. A balról jobbra átlépés gyakorisága $x_i p_i$, a jobbról balra átlépés gyakorisága $x_{i+1} q_{i+1}$.

Végtelen sor esetén számítsuk ki a stacionárius eloszlást a dinamikus egyensúly egyenletekből.

$$x_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{p_0}{q_1} x_0, \qquad x_2 = \frac{p_1}{q_2} x_1 = \frac{p_0 p_1}{q_1 q_2} x_0$$

stb. Általában

$$x_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} p_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i} x_0.$$

Születési-halálozási folyamat

Végül behelyettesítve $x_0 + x_1 + \cdots = 1$-be:

$$x_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} p_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}}.$$

Születési-halálozási folyamat

Végül behelyettesítve $x_0 + x_1 + \cdots = 1$-be:

$$x_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} p_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}}.$$

Ha a nevezőben szereplő sorösszeg véges, akkor megkaptuk x_0-t, és onnan a teljes stacionárius eloszlást. Ilyenkor a stacionárius eloszlás egyértelmű.

Születési-halálozási folyamat

Végül behelyettesítve $x_0 + x_1 + \cdots = 1$-be:

$$x_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} p_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}}.$$

Ha a nevezőben szereplő sorösszeg véges, akkor megkaptuk x_0-t, és onnan a teljes stacionárius eloszlást. Ilyenkor a stacionárius eloszlás egyértelmű.

Ha a nevezőben szereplő sorösszeg végtelen, akkor nem létezik stacionárius eloszlás. Szemléletes magyarázat: ha a p_i-k (felfelé lépés valószínűségei) túl nagyok a q_i-khez (lefelé lépés valószínűségeihez) képest, akkor a Markov-lánc hosszú távon egyre feljebb fog menni, és az eloszlása nem konvergál.

Születési-halálozási folyamat

Végül behelyettesítve $x_0 + x_1 + \cdots = 1$-be:

$$x_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} p_i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}}.$$

Ha a nevezőben szereplő sorösszeg véges, akkor megkaptuk x_0-t, és onnan a teljes stacionárius eloszlást. Ilyenkor a stacionárius eloszlás egyértelmű.

Ha a nevezőben szereplő sorösszeg végtelen, akkor nem létezik stacionárius eloszlás. Szemléletes magyarázat: ha a p_i-k (felfelé lépés valószínűségei) túl nagyok a q_i-khez (lefelé lépés valószínűségeihez) képest, akkor a Markov-lánc hosszú távon egyre feljebb fog menni, és az eloszlása nem konvergál.

Picit bővebben erre még visszatérünk a folytonos idejű Markov-láncoknál.

Bolyongás irányítatlan gráfon

Egy másik speciális osztályt is megvizsgálunk. Legyen adott egy n csúcsú irányítatlan gráf. A Markov-lánc a csúcsokon bolyong úgy, hogy mindig az aktuális csúcs szomszédai közül egyenletesen választ egyet, és az lesz a következő állapot.

Tétel.

A $v_{st} = (x_1, \ldots, x_n)$ stacionárius eloszlás a fokszámokkal arányos, azaz

$$x_i = \frac{d_i}{\sum_{j=1}^{n} d_j},$$

ahol $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a gráf fokszámai.

Biz. Ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás definícióját:

$$(v_{\mathrm{st}} \cdot P)_i = \sum_j x_j P_{ji} = \sum_{j:j \text{ és } i \text{ szomszédos}} \frac{d_j}{\sum_i d_i} \cdot \frac{1}{d_j} = \frac{d_i}{\sum_i d_i} = x_i.$$

Összefoglalás

- Mindig van legalább egy v_{st}.
- Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \ldots \ x_k)$ egyértelmű és $x_i > 0 \, \forall i$.
- Egy reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb mindig egy rekurrens osztályban köt ki, ami egy mini irreducibilis Markov-láncnak is tekinthető.
- Irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ gyorsan.
- Irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_n periodikusan közelíthető v_{st} megfelelő periodicitási osztályra vett feltételes eloszlásával.
- Irreducibilis Markov-lánc hosszú távon i-ben az idő x_i részét tölti az i állapotban, és az i-be való visszatérések között eltelt átlagos lépésszám $\frac{1}{x_i}$.
- Ergodtétel: egy függvény hosszú távú időátlaga $\mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f)$, f-nek a stacionárius eloszlás szerinti várható értéke.