2. Folytonos idejű Markov-láncok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/09/11

(1) Kiindulási pont: Markov-láncok
(2) Infinitezimális generátor mátrix
(3) „Óra és kocka” vs. „versengő órák” értelmezés
(4) Hosszú távú viselkedés
(5) Rövid távú viselkedés
(6) Beágyazott Markov-lánc
(7) Markov-sorok
(8) Nevezetes Markov-sorok
(9) Little-formula
(10) Kitekintés: öregedő és fiatalodó eloszlások, nem Markovi sorok

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.)

Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A folytonos idejű Markov-láncok többféleképpen is bevezethetőek:

(1) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és randomizáljuk a várakozási időt az átmenetek között.

(2) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és a diszkrét időegységgel 0-hoz tartunk.

(3) Absztrakt félcsoportos definícióval.

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A folytonos idejű Markov-láncok többféleképpen is bevezethetőek:

(1) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és randomizáljuk a várakozási időt az átmenetek között.

(2) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és a diszkrét időegységgel 0-hoz tartunk.

(3) Absztrakt félcsoportos definícióval.

Mi az (1)-est fogjuk csinálni, de végeredményben mindhárom ekvivalens és ugyanazt a folyamatot definiálja.

Kiindulási pont: Markov-láncok

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

Kiindulási pont: Markov-láncok

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*.

Kiindulási pont: Markov-láncok

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*.

Ez az ún. *memóriamentes tulajdonság*. Formálisan úgy írható fel, hogy

$$\mathbb{P}(T < t + s | T > t) = \mathbb{P}(T < s) \qquad \forall s, t > 0,$$

vagy, ezzel ekvivalensen,

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

Memóriamentes tulajdonság

Tétel.

(a) *Az exponenciális eloszlás memóriamentes. Azaz ha* $T \sim EXP(\lambda)$ *valamely* $\lambda > 0$*-ra, akkor*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

(b) *Az exponenciális eloszlás az egyetlen memóriamentes folytonos eloszlás. Azaz ha*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0$$

teljesül egy folytonos T *valószínűségi változóra, akkor* $T \sim EXP(\lambda)$ *valamely* $\lambda > 0$*-ra.*

Biz.

(a) Legyen $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$. Az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

és így

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t},$$

Biz.

(a) Legyen $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$. Az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

és így

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t},$$

továbbá

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \\
= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).$$

Memóriamentes tulajdonság

(b) Biz. (vázlat) Ha T-re teljesül a memóriamentes tulajdonság, akkor

$$\frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \mathbb{P}(T > s).$$

Legyen

$$g(t) = \log \mathbb{P}(T > t).$$

Memóriamentes tulajdonság

(b) Biz. (vázlat) Ha T-re teljesül a memóriamentes tulajdonság, akkor

$$\frac{\mathbb{P}(T > t+s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \mathbb{P}(T > s).$$

Legyen

$$g(t) = \log \mathbb{P}(T > t).$$

Ekkor $g(t)$ kielégíti a Cauchy függvényegyenletet:

$$g(t+s) = g(t) + g(s) \qquad \forall t, s > 0$$

valamint folytonos, tehát a megoldása csak a lineáris függvény lehet:

$$g(t) = -\lambda t, \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

T idő eltelte után a következő állapotot véletlenszerűen választjuk ki a P mátrix i-edik sora alapján, függetlenül T-től (és általában a múlttól is).

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

T idő eltelte után a következő állapotot véletlenszerűen választjuk ki a P mátrix i-edik sora alapján, függetlenül T-től (és általában a múlttól is).

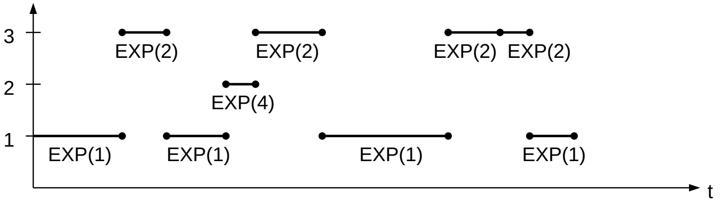
A Markov-lánc átlép az új állapotba, ezután a fenti ciklust újrakezdjük egy új T generálásával stb.

Példa

Példa. Legyen egy diszkrét idejű Markov-láncunk 3 állapoton $v(0) = (\,1\;0\;0\,)$ kezdővektorral és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixszal, és legyenek $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$. Ekkor a diszkrét idejű Markov-lánc $1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots$ realizációja a megfelelő folytonos idejű Markov-láncra a következő lesz:



Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Legyen $v(t)$ az eloszlásvektor t időpontban, vagyis

$$v_i(t) = \mathbb{P}(\text{a Markov-lánc az } i \text{ állapotban van } t\text{-kor}).$$

Ezúttal $t \in [0, \infty)$, nemcsak egész értékeket vehet fel az idő.

Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Legyen $v(t)$ az eloszlásvektor t időpontban, vagyis

$$v_i(t) = \mathbb{P}(\text{a Markov-lánc az } i \text{ állapotban van } t\text{-kor}).$$

Ezúttal $t \in [0, \infty)$, nemcsak egész értékeket vehet fel az idő.

Tétel.

$$v(t) = v(0)e^{Qt},$$

ahol a Q mátrixot $(P - I)$-ből kapjuk úgy, hogy az i-edik sort megszorozzuk λ_i-vel minden i-re, és I az identitásmátrix.

Q a folyamat *infinitezimális generátora* vagy röviden *generátora*.

Infinitezimális generátor

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba.

Infinitezimális generátor

Biz. (vázlat) Legyen

$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt.

Infinitezimális generátor

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt. Ennek megoldása

$$P(t) = e^{Qt} \qquad \text{ahol} \qquad Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}.$$

Infinitezimális generátor

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt. Ennek megoldása

$$P(t) = e^{Qt} \qquad \text{ahol} \qquad Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}.$$

Végül $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}$ kiszámítása pont a tételben definiált Q mátrixot adja.

Példa

Az előző példában

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

és $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$, ahonnan

$$P - I = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & -1 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & -3/4 \end{bmatrix}$$

és

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Egy A mátrixra e^A kiszámítható vagy hatványsor alakban:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

vagy Jordan-normálalakból.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Egy A mátrixra e^A kiszámítható vagy hatványsor alakban:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

vagy Jordan-normálalakból.

Leszneks majd egyszerűen kiszámítható közelítések is e^{Qt}-re.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Erre „óra és kocka” interpretációként hivatkozunk, mert gondolhatunk rá úgy, hogy először felhúzunk egy vekkert, ami véletlen EXP(λ_i) idő után csörög, majd amikor csörög, gurítunk egy dobókockával a következő állapot kisorsolásához.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Erre „óra és kocka" interpretációként hivatkozunk, mert gondolhatunk rá úgy, hogy először felhúzunk egy vekkert, ami véletlen EXP(λ_i) idő után csörög, majd amikor csörög, gurítunk egy dobókockával a következő állapot kisorsolásához.

Megnézünk egy másik, de ezzel ekvivalens értelmezést.

Versengő órák

Lemma

Legyenek $X_1, \ldots, X_k$ *függetlenek,* $X_i \sim EXP(\mu_i)$ *és*

$$Y = \min(X_1, \ldots, X_k).$$

Ekkor $Y \sim EXP(\mu_1 + \cdots + \mu_k)$ *és*

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \cdots + \mu_k}.$$

Versengő órák

Lemma

Legyenek $X_1, \dots, X_k$ *függetlenek,* $X_i \sim EXP(\mu_i)$ *és*

$$Y = \min(X_1, \dots, X_k).$$

Ekkor $Y \sim EXP(\mu_1 + \dots + \mu_k)$ *és*

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_k}.$$

Nem biz. (De $k = 2$-re egyszerű számolás és onnan teljes indukcióval adódik általános k-ra.)

Versengő órák

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

Versengő órák

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

A 2-es állapotból a Markov-lánc átléphet az 1-es vagy 3-as állapotba. Ezúttal 2 vekkert húzunk fel, egyet-egyet a lehetséges átmenetekhez: $T_{2\to 1} \sim \mathrm{EXP}(4/5)$ és $T_{2\to 3} \sim \mathrm{EXP}(16/5)$, és legyenek függetlenek.

Versengő órák

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

A 2-es állapotból a Markov-lánc átléphet az 1-es vagy 3-as állapotba. Ezúttal 2 vekkert húzunk fel, egyet-egyet a lehetséges átmenetekhez: $T_{2\to 1} \sim \mathrm{EXP}(4/5)$ és $T_{2\to 3} \sim \mathrm{EXP}(16/5)$, és legyenek függetlenek.

Az órák *versenyeznek*: amelyik először csörög, az az átmenet történik meg (és a másik nem).

Versengő órák

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

Versengő órák

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

A következő átmenet ideje

$$T = \min(T_{2\to1}, T_{2\to3}).$$

A lemma szerint $T \sim \mathrm{EXP}(16/5 + 4/5)$, aminek a paramétere éppen $\lambda_2 = 4$.

Versengő órák

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

A következő átmenet ideje

$$T = \min(T_{2\to1}, T_{2\to3}).$$

A lemma szerint $T \sim \mathrm{EXP}(16/5 + 4/5)$, aminek a paramétere éppen $\lambda_2 = 4$.

Továbbá

$$\mathbb{P}(T = T_{2\to1}) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$
$$\mathbb{P}(T = T_{2\to3}) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5,$$

ami összhangban van P második sorával:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Versengő órák

A fenti *„versengő órák"* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák"* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

A sorhossz $+1$-gyel vagy -1-gyel változik, attól függően, melyik következik be előbb, így itt természetes módon megjelenik a kétfajta változás, amik úgymond egymással versenyeznek.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

A sorhossz $+1$-gyel vagy -1-gyel változik, attól függően, melyik következik be előbb, így itt természetes módon megjelenik a kétfajta változás, amik úgymond egymással versenyeznek.

Ez az interpretáció sok valós helyzetben természetes: a rendszer változásai sokféle versengő hatás eredménye.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(4/5)$, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(16/5)$.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(4/5)$, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(16/5)$.

A főátlóbeli negatív elemek a *kimenő ráták* az egyes állapotokból ($-$ előjellel), tehát például a 2-es állapotban annak a rátája, hogy történik *bármilyen* átmenet, $4 = 4/5 + 16/5$.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(4/5)$, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\mathrm{EXP}(16/5)$.

A főátlóbeli negatív elemek a *kimenő ráták* az egyes állapotokból ($-$ előjellel), tehát például a 2-es állapotban annak a rátája, hogy történik *bármilyen* átmenet, $4 = 4/5 + 16/5$.

Egy átmenet után a Markov-lánc egy új állapotban van, az új állapotnak megfelelő lehetséges célállapotokkal és átmenet rátákkal.

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal!

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Jogos-e feltenni, hogy az érkezési időközök exponenciális eloszlásúak? Általában, ha az érkezések sok különböző forrásból történnek, melyek mindegyikének a kontribúciója kicsi, akkor ez egy jogos feltevés. (Erről bővebben lásd: Poisson-pontfolyamat.)

Példa

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

Példa

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

És ez a feltevés jogos-e? Nem tudjuk. Azonban a Markov-tulajdonság teljesüléséhez szükséges, hogy a várakozási idő exponenciális eloszlású legyen, tehát ha nincs több információ megadva, akkor akár fel is tehetjük.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Az átlós elemeket írjuk be utoljára úgy, hogy a sorösszegek 0-k legyenek.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezési időköz és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Az átlós elemeket írjuk be utoljára úgy, hogy a sorösszegek 0-k legyenek. Összességében a generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

A stacionárius eloszlás definíciója picit eltér a diszkrét idejű esettől: $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \dots \ x_k)$ stacionárius, ha

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_k &= 1, \\ v_{\mathrm{st}} Q &= 0, \end{aligned}$$

ahol 0 a konstans 0 vektort jelöli.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

A stacionárius eloszlás definíciója picit eltér a diszkrét idejű esettől: $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \dots \ x_k)$ stacionárius, ha

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_k &= 1, \\ v_{\mathrm{st}} Q &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{0}$ a konstans 0 vektort jelöli.

$$v(0) = v_{\mathrm{st}} \Longrightarrow v(t) = v_{\mathrm{st}} \quad \forall t > 0.$$

Tétel. (Fő tétel)

(a) *Bármely (véges állapotterű) folytonos idejű Markov-láncra létezik legalább egy v_{st}.*

(b) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű, az elemei szigorúan pozitívak, és*

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = v_{st}$$

tetszőleges $v(0)$ kezdeti vektor esetén.

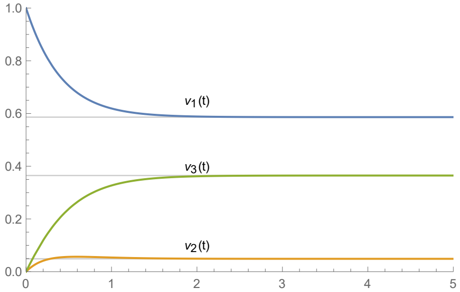
(c) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor hosszú távon az idő x_i részét tölti az i állapotban, ahol $v_{st} = (x_1 \ \dots \ x_k)$.*

Példa

$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_{\mathrm{st}}$ konvergenciasebessége gyors, hasonlóan a diszkrét idejű esethez. A korábbi példára

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

és $v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, esetén $v(t)$ (a 3 színes függvény) és v_{st} (szürke vízszintes vonalak) alakulása:



Közelítések e^{Qt}-re

A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

Közelítések e^{Qt}-re

A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

A rövid távú közelítés

$$e^{Qt} \approx I + tQ \qquad \text{ha } t \text{ kicsi.}$$

(Ez tulajdonképpen az e^x függvény elsőrendű közelítése.)

Közelítések e^{Qt}-re

A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

A rövid távú közelítés

$$e^{Qt} \approx I + tQ \qquad \text{ha } t \text{ kicsi.}$$

(Ez tulajdonképpen az e^x függvény elsőrendű közelítése.)

A rövid távú közelítésnek van egy érdekes értelmezése: ha t kicsi, akkor t idő alatt lehet

- 0 átmenet 1-hez közeli valószínűséggel;
- 1 átmenet t-vel arányos valószínűséggel, és
- 2 vagy több átmenet valószínűsége ezekhez képest elhanyagolható.

Hosszú távú viselkedés

Tétel. (Ergodtétel)

Ha egy irreducibilis Markov-lánc konkrét realizációját

$$X(t), \qquad t \geq 0$$

jelöli, akkor tetszőleges f, állapotokon értelmezett függvényre

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T f(X(t))\mathrm{d}t}{T} = \mathbb{E}_{st}(f),$$

ahol

$$\mathbb{E}_{st}(f) = x_1 f(1) + \cdots + x_k f(k),$$

ahol

$$v_{st} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix}.$$

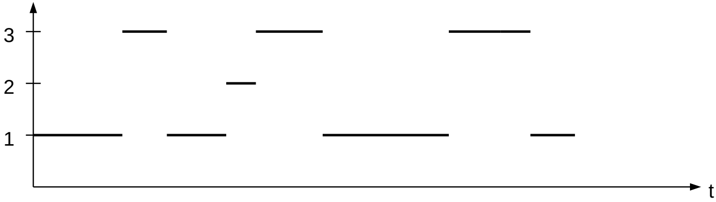
Beágyazott Markov-lánc

Egy folytonos idejű Markov-lánc beágyazott Markov-lánca a meglátogatott állapotok sorozata, ami egy diszkrét idejű Markov-lánc.

Beágyazott Markov-lánc

Egy folytonos idejű Markov-lánc beágyazott Markov-lánca a meglátogatott állapotok sorozata, ami egy diszkrét idejű Markov-lánc.

A korábbi példára a



realizációnak megfelelő beágyazott Markov-lánc realizáció

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \ldots$$

Beágyazott Markov-lánc

Számítsuk ki a beágyazott Markov-lánc P átmenet-valószínűség mátrixát. A példában

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es állapotból a lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $1 \to 3$, és

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 2 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = 1/3,$$
$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{2/3}{1/3 + 2/3} = 2/3.$$

Beágyazott Markov-lánc

Számítsuk ki a beágyazott Markov-lánc P átmenet-valószínűség mátrixát. A példában

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es állapotból a lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $1 \to 3$, és

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 2 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = 1/3,$$
$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{2/3}{1/3 + 2/3} = 2/3.$$

Ez alapján P' első sora

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Beágyazott Markov-lánc

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

Beágyazott Markov-lánc

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

A fenti számítások összefoglalva: P'-t úgy kapjuk, hogy először Q i-edik sorát leosztjuk $|q_{ii}|$-vel minden i-re, majd hozzáadjuk az I identitásmátrixot.

Beágyazott Markov-lánc

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

A fenti számítások összefoglalva: P'-t úgy kapjuk, hogy először Q i-edik sorát leosztjuk $|q_{ii}|$-vel minden i-re, majd hozzáadjuk az I identitásmátrixot. A végeredmény

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Nem pont ugyanaz a mátrix! Az első két sor ugyanaz, de a harmadik eltérő.

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Nem pont ugyanaz a mátrix! Az első két sor ugyanaz, de a harmadik eltérő.

Ennek oka, hogy az eredeti Markov-láncban a $3 \to 3$ átmenetnek pozitív a valószínűsége. A beágyazott Markov-láncra viszont a következő állapot mindig az, ami *ténylegesen eltér* az aktuális állapottól. Emiatt ami eredetileg egy állapotban eltöltött több lépés, az a beágyazott Markov-láncban egyetlen lépésként jelenik meg.

Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

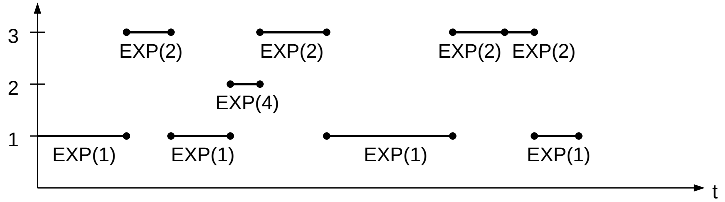
$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots,$$

Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots,$$

és a Q generátorú folytonos idejű Markov-lánc realizációja

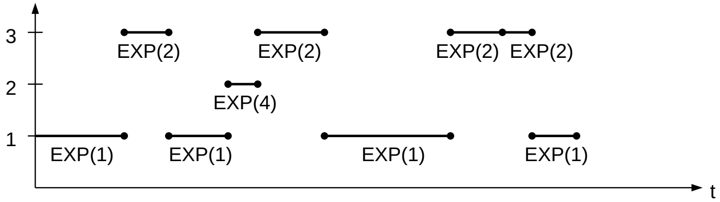


Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots,$$

és a Q generátorú folytonos idejű Markov-lánc realizációja



akkor a P'-höz tartozó beágyazott Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \ldots$$

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, \dots\, x_k)$ a Q generátorú CTMC stacionárius eloszlása, és legyen $u_{\mathrm{st}} = (y_1\, y_2\, \dots\, y_k)$ a P' átmenet-valószínűség mátrixú beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Jelöljük továbbá $\lambda_i = |q_{ii}|$-vel a kimenő rátákat. Ekkor

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

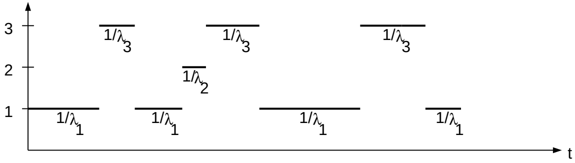
Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, \dots\, x_k)$ a Q generátorú CTMC stacionárius eloszlása, és legyen $u_{\mathrm{st}} = (y_1\, y_2\, \dots\, y_k)$ a P' átmenet-valószínűség mátrixú beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Jelöljük továbbá $\lambda_i = |q_{ii}|$-vel a kimenő rátákat. Ekkor

Lemma

$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j} \qquad\qquad y_i = \frac{x_i\lambda_i}{\sum_j x_j\lambda_j}.$$

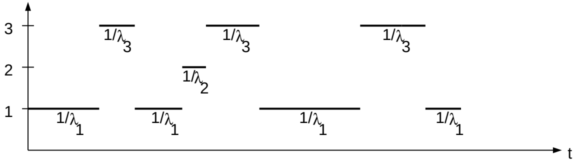
Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.



Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.

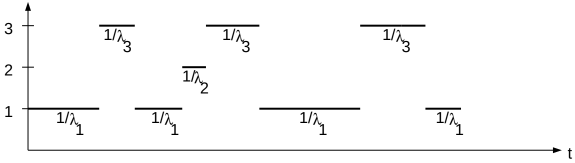


x_i az i állapotban eltöltött *idő aránya* a teljes időhöz képest. Az intervallum darabszámának arányához képest ezt még súlyozni kell az intervallumok hosszával is. Az i állapotban eltöltött idő átlagos hossza $1/\lambda_i$, ahonnan

$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j}.$$

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.



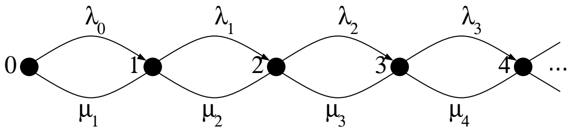
x_i az i állapotban eltöltött *idő aránya* a teljes időhöz képest. Az intervallum darabszámának arányához képest ezt még súlyozni kell az intervallumok hosszával is. Az i állapotban eltöltött idő átlagos hossza $1/\lambda_i$, ahonnan

$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j}.$$

(A nevező csak normalizálás.) A lemma másik képlete ekvivalens.

Markov-sor

Megvizsgáljuk Markov-láncok egy osztályát, aminek speciális szerkezete van. Ha a Markov-lánc állapotai $0, 1, 2 \ldots,$ és átmenetek csak szomszédos állapotok között történhetnek, akkor ez egy *folytonos idejű születési-halálozási folyamat* vagy *Markov-sor*.



Az állapotok száma lehet véges vagy végtelen. Általában λ_i jelöli az $i \to i+1$ átmenet rátáját és μ_i az $i \to i-1$ átmenet rátáját.

Markov-sor

Születési-halálozási folyamatnak azért hívjuk, mert használható populáció változás modellezésére. Ilyenkor a felfelé történő átmenet megfelel egy születésnek, és a lefelé történő átmenet egy halálozásnak a populáción belül.

Markov-sor

Születési-halálozási folyamatnak azért hívjuk, mert használható populáció változás modellezésére. Ilyenkor a felfelé történő átmenet megfelel egy születésnek, és a lefelé történő átmenet egy halálozásnak a populáción belül.

Markov-sornak azért szokás hívni, mert sorhossz változás modellezésére is használható (lásd a múltkori példát a pénzváltóval). Ilyenkor egy $+1$-es átmenet megfelel egy új ügyfél/igény érkezésének, míg egy -1-es átmenet megfelel egy kiszolgálásnak.

Azért Markov, mert ha a kiszolgálási idő és az érkezési időköz mindkettő exponenciális eloszlású, akkor ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

Markov-sor

Minden Markov-sor irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a fő tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Markov-sor

Minden Markov-sor irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a fő tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

A dinamikus egyensúly egyenletek itt is teljesülnek (véges vagy végtelen állapottér esetén is), a következő formában.

Tétel. (Dinamikus egyensúly egyenletek)

Bármely (véges vagy végtelen állapotterű) Markov-sorra, ha $(x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$ *stacionárius eloszlás, akkor*

$$x_i \lambda_i = x_{i+1} \mu_{i+1}.$$

Markov-sor

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

$$v_{\mathrm{st}} Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Markov-sor

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

$$v_{\mathrm{st}} Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Második biz. Az i és $i+1$ közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a rátája meg kell, hogy egyezzen.

Markov-sor

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

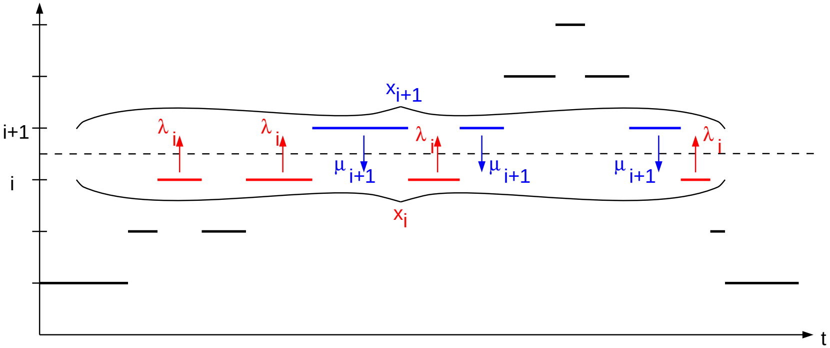
$$v_{\mathrm{st}} Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Második biz. Az i és $i+1$ közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a rátája meg kell, hogy egyezzen.

Az $i \to i+1$ átlépés rátája λ_i, de csak akkor, ha a folyamat i-ben van. A folyamat az idő x_i részében tartózkodik az i állapotban, így hosszú távon az $i \to i+1$ átlépések sűrűsége (rátája) $x_i \lambda_i$; hasonlóan az $i+1 \to i$ átlépések sűrűsége $x_{i+1}\mu_{i+1}$, és hosszú távon ez a két sűrűség megegyezik.

Markov-sor

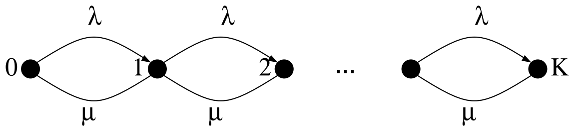


M/M/1/K sor

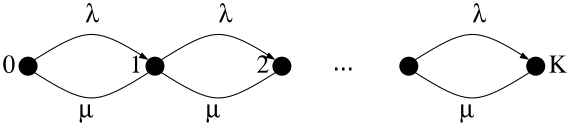
A Markov-sorokon belül egy speciális osztály az M/M/1/K sor. Ez egy olyan szervert modellez, amihez tartozik egy K kapacitású buffer (ami K kiszolgálandó igényt képes tárolni, beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is). A szerver mindig az első igény kiszolgálását végzi, amíg a többi igény várakozik. Amikor a szerver végez az első igény kiszolgálásával, az kiürül a rendszerből és a szerver azonnal elkezdi a következő igény kiszolgálását. Az újonnan érkező igényok a sor végére kerülnek. Ha a sor tele van, az érkező igények elvesznek.

Az érkezési ráta λ, a kiszolgálási ráta μ.

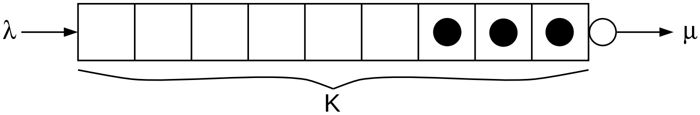
M/M/1/K sor



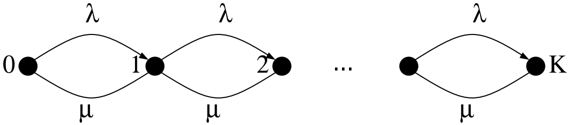
M/M/1/K sor



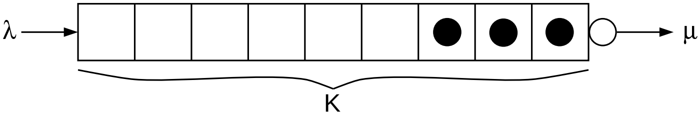
Gyakran ábrázolják így:



M/M/1/K sor



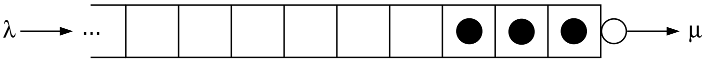
Gyakran ábrázolják így:



Az M/M/1/K jelölésben az első M a markovi érkezésre utal, a második M a markovi kiszolgálásra, az 1 a szerverek száma és K a buffer mérete. Ez az ún. Kendall-féle jelölés.

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.



M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, \ldots)$ stacionárius eloszlást. A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\rm st} = (x_0\, x_1\ \dots)$ stacionárius eloszlást. A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_0, \qquad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 x_0$$

stb.

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\ \ldots)$ stacionárius eloszlást. A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_0, \qquad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 x_0$$

stb. Általában

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n x_0.$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, a szumma véges:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \lambda/\mu},$$

és a dinamikus egyensúly egyenletek megoldása

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu).$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, a szumma véges:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \lambda/\mu},$$

és a dinamikus egyensúly egyenletek megoldása

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a sor *stabil*; v_{st} egyértelműen létezik, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ is teljesül tetszőleges $v(0)$ esetén. (Utóbbit nem biz.)

M/M/1 sor

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \dots$, tehát $x_0 + x_1 + \cdots = 1$ nem teljesül.

M/M/1 sor

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \dots$, tehát $x_0 + x_1 + \dots = 1$ nem teljesül.

Összességében a $\lambda \geq \mu$ esetben a dinamikus egyensúly egyenleteknek nincs megoldása, és nem létezik stacionárius eloszlás.

M/M/1 sor

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \dots$, tehát $x_0 + x_1 + \dots = 1$ nem teljesül.

Összességében a $\lambda \geq \mu$ esetben a dinamikus egyensúly egyenleteknek nincs megoldása, és nem létezik stacionárius eloszlás.

Intuitívan a következő történik: ha $\lambda > \mu$, az érkezési ráta nagyobb, mint a kiszolgálási ráta, és hosszú távon az igények egyre csak gyűlnek a sorban, és a sorhossz tart a végtelenhez, azaz nem konvergál semmilyen (stacionárius) eloszláshoz.

M/M/1 sor

- A $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ eset a *stabil* M/M/1 sor. Lényegében úgy viselkedik, mint a véges állapotterű irreducibilis Markov-láncok, azaz v_{st} egyértelműen létezik és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ is teljesül.
- A $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ eset a *kritikus* M/M/1 sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz felfelé vagy lefelé is változhat véletlenszerűen. (Egyébként a sor minden állapotot végtelen sokszor meglátogat; minden állapot null-rekurrens.)
- A $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ eset az *instabil* sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz hosszú távon végtelenhez tart.

M/M/1 sor

- A $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ eset a *stabil* M/M/1 sor. Lényegében úgy viselkedik, mint a véges állapotterű irreducibilis Markov-láncok, azaz v_{st} egyértelműen létezik és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ is teljesül.
- A $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ eset a *kritikus* M/M/1 sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz felfelé vagy lefelé is változhat véletlenszerűen. (Egyébként a sor minden állapotot végtelen sokszor meglátogat; minden állapot null-rekurrens.)
- A $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ eset az *instabil* sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz hosszú távon végtelenhez tart.

A

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

arány a sor *terhelése*; a stabilitás feltétele az M/M/1 sorra tehát $\rho < 1$.

Stabilitás feltétele

Olyan végtelen állapotterű Markov-sornál, amikor λ_i és μ_i nem konstans, a stabilitás feltétele

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} < \infty.$$

Stabilitás feltétele

Olyan végtelen állapotterű Markov-sornál, amikor λ_i és μ_i nem konstans, a stabilitás feltétele

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} < \infty.$$

M/M/c és M/M/c/K az M/M/1-hez és M/M/1/K-hoz hasonló sorokat jelölnek, csak 1 helyett c darab szerverrel, amelyek mindegyikének a kiszolgálási rátája μ. Minden szerver mindig egy igényen dolgozik (amíg a buffer ki nem ürül), és kiszolgálás után egyből elkezdi a következőt kiszolgálni. Az M/M/c sorra a stabilitás feltétele

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1,$$

ahol λ az érkezési ráta és μ egy szerver kiszolgálási rátája.

Várakozási idő

Sorbanállási problémáknál egy fontos jellemző a *várakozási idő* vagy *rendszerben töltött idő*, ami a sorba való beérkezés pillanatától a kiszolgálás végéig eltelt idő. Ez általában véletlenszerű; érdekes a teljes eloszlása is (jön is később), de ha egyetlen számmal kell jellemezni, akkor az általában a várható értéke.

Várakozási idő

Sorbanállási problémáknál egy fontos jellemző a *várakozási idő* vagy *rendszerben töltött idő*, ami a sorba való beérkezés pillanatától a kiszolgálás végéig eltelt idő. Ez általában véletlenszerű; érdekes a teljes eloszlása is (jön is később), de ha egyetlen számmal kell jellemezni, akkor az általában a várható értéke.

Az eddig tárgyaltak (pl. a sorhossz stacionárius eloszlása) az átlagos várakozási időről közvetlenül nem adnak információt. Szerencsére van az átlagos várakozási időre egy egyszerű formula.

Little-formula

Tétel. (Little-formula)

$$L = \lambda_e W,$$

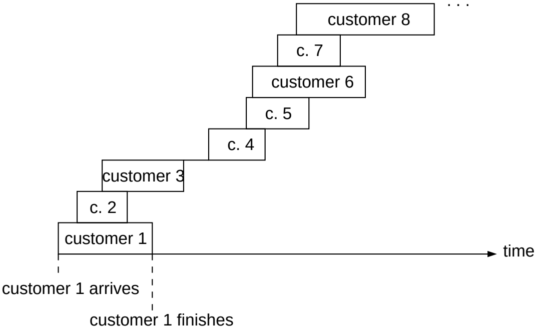
ahol

- *W az átlagos várakozási idő értéke.*
- *λ_e az effektív érkezési ráta; véges állapottér esetén a teli buffer miatt elveszett érkezések nem számítanak bele λ_e-be.*
- *L az átlagos sorhossz. Ez a stacionárius eloszlásból könnyen megkapható az ergodtétel révén:*

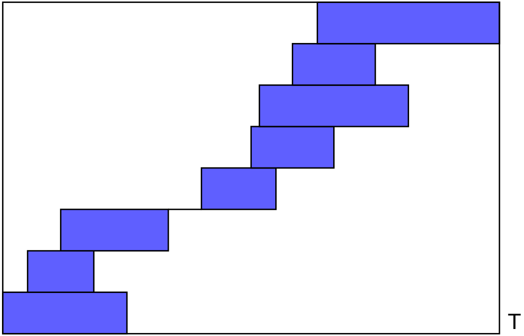
$$L = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots$$

Little-formula

Biz. (vázlat) Ábrázoljuk az igényeket a következő módon (az érkezés ideje szerint rendezve):

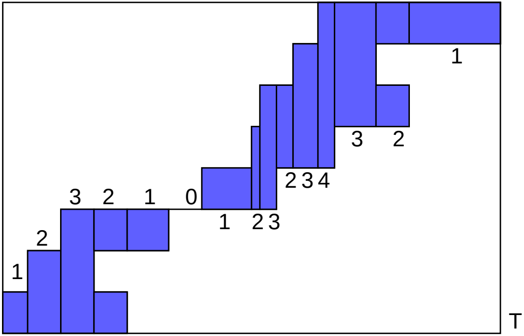


Little-formula



Nagy T esetén a téglalapok száma T-ig $\lambda_e T + o(T)$ a NSzT alapján, egy téglalap területe pedig átlagosan W, tehát a kék terület összesen $B = \lambda_e TW + o(T)$.

Little-formula



Másrészt a kék területet T-vel osztva éppen az átlagos sorhosszt kapjuk meg:

$$L = \frac{B}{T} = \frac{\lambda_e T W}{T} = \lambda_e W.$$

Little-formula

Megjegyzések.
Véges Markov-sorra λ_e kiszámítható a stacionárius eloszlásból:

$$\lambda_e = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_K x_K,$$

speciálisan ha az érkezési ráta konstans λ, akkor ez a következő alakban is írható:

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_K).$$

Little-formula

Megjegyzések.
Véges Markov-sorra λ_e kiszámítható a stacionárius eloszlásból:

$$\lambda_e = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_K x_K,$$

speciálisan ha az érkezési ráta konstans λ, akkor ez a következő alakban is írható:

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_K).$$

Végtelen, stabil sorra pedig, ha az érkezési ráta konstans λ, akkor

$$\lambda_e = \lambda.$$

Little-formula

Mi most Markov-sorokra mondtuk ki, de a Little-formula gyakorlatilag tetszőleges sorbanállási rendszerre teljesül, például a következő esetekben:

- ha például az érkezési időköz vagy a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású (ilyenkor a sor nem is Markov-lánc);
- ha a rendszer nem beérkezési sorrendben szolgálja ki az igényeket;
- ha több sorból áll a rendszer (sőt, ilyenkor igaz külön-külön az egyes sorokra és globálisan az egész rendszerre is).

Little-formula

Mi most Markov-sorokra mondtuk ki, de a Little-formula gyakorlatilag tetszőleges sorbanállási rendszerre teljesül, például a következő esetekben:

- ha például az érkezési időköz vagy a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású (ilyenkor a sor nem is Markov-lánc);
- ha a rendszer nem beérkezési sorrendben szolgálja ki az igényeket;
- ha több sorból áll a rendszer (sőt, ilyenkor igaz külön-külön az egyes sorokra és globálisan az egész rendszerre is).

Viszont a Little-formula csak az összes beérkező igényre kiátlagolt várakozási időt számítja ki. Részletesebb információhoz (pl. az átlagos várakozási idő a beérkezéskori sorhossz függvényében) részletesebb számításokra van szükség.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Az exponenciális eloszlás memóriamentes/örökifjú:

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Az exponenciális eloszlás memóriamentes/örökifjú:

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

de a valóságban van sok releváns eloszlás, amik nem ilyenek. Azt mondjuk, hogy egy eloszlás *öregedő*, ha

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) < \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

és *fiatalodó*, ha

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) > \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

(Vannak olyan eloszlások, amikre a fentiek egyike sem igaz.)

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora. Ha egy sorban a kiszolgálási idő exponenciális helyett öregedő eloszlású, az annak felel meg, hogy a kiszolgálás 'halad előre', egyre közelebb kerül a célhoz.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora. Ha egy sorban a kiszolgálási idő exponenciális helyett öregedő eloszlású, az annak felel meg, hogy a kiszolgálás 'halad előre', egyre közelebb kerül a célhoz.

A fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora. Ha egy sorban a kiszolgálási idő exponenciális helyett öregedő eloszlású, az annak felel meg, hogy a kiszolgálás 'halad előre', egyre közelebb kerül a célhoz.

A fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Illetve egy sorban ha a kiszolgálás külön jelzés nélkül 'megakadhat', és onnan nagyon sok/végtelen ideig tartana, az is fiatalodó eloszlás: ahogy telik az idő kiszolgálás nélkül, egyre nagyobb a valószínűsége, hogy a kiszolgálás megakadt.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora. Ha egy sorban a kiszolgálási idő exponenciális helyett öregedő eloszlású, az annak felel meg, hogy a kiszolgálás 'halad előre', egyre közelebb kerül a célhoz.

A fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Illetve egy sorban ha a kiszolgálás külön jelzés nélkül 'megakadhat', és onnan nagyon sok/végtelen ideig tartana, az is fiatalodó eloszlás: ahogy telik az idő kiszolgálás nélkül, egyre nagyobb a valószínűsége, hogy a kiszolgálás megakadt.

A Little-formula olyan esetekben sérülhet, ha egy részben elvégzett munka/kiszolgálás "elveszhet", pl. valamilyen okból egy igény kiszolgálása újrakezdődik. Fontos: ez csak nem-markovi kiszolgálás esetén fordulhat elő, markovi (exponenciális) kiszolgálási idő esetén a Little-formula mindig teljesül. Ha a kiszolgálási idő öregedő eloszlású, akkor általában rossz ötlet újraindítani, ha viszont fiatalodó, akkor az újraindítással jobban járunk.

Kitekintés: egyéb sorok

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

Kitekintés: egyéb sorok

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

G/M/1 egy olyan sort jelöl, ahol az érkezési időköz nem exponenciális eloszlású. Ez sem Markov-lánc.

Kitekintés: egyéb sorok

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

G/M/1 egy olyan sort jelöl, ahol az érkezési időköz nem exponenciális eloszlású. Ez sem Markov-lánc.

A G/G/1 sorban az érkezési időköz és a kiszolgálási idő is általános eloszlású.