4. Poisson folyamatok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/09/25

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Példák:

- egy szerverhez beérkező igények;

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Példák:

- egy szerverhez beérkező igények;
- egy városban a tűzesetek;

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Példák:

- egy szerverhez beérkező igények;
- egy városban a tűzesetek;
- az utcán elhaladó autók;

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Példák:

- egy szerverhez beérkező igények;
- egy városban a tűzesetek;
- az utcán elhaladó autók;
- egy könyvben a hibák.

Bevezetés

A Poisson-folyamatot gyakran használjuk érkezési folyamatok modellezésére.

Példák:

- egy szerverhez beérkező igények;
- egy városban a tűzesetek;
- az utcán elhaladó autók;
- egy könyvben a hibák.

Pontfolyamatok általában

Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0, \infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk.

Pontfolyamatok általában

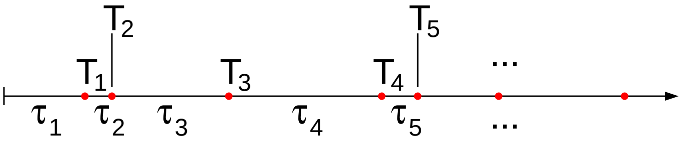
Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0, \infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk. Egy pontfolyamat egy konkrét realizációja $[0, \infty)$-en többféle ekvivalens módon megadható:

- az érkezési idők listájával: $T_1, T_2, \ldots,$ vagy
- az érkezési időközök listájával: $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ vagy
- a számláló folyamattal: $N(t)$ az érkezések száma 0 és t között.

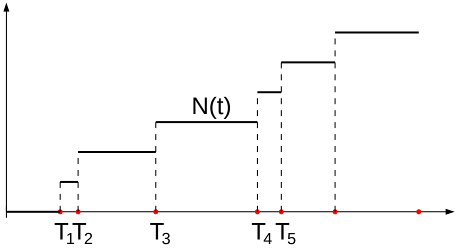
Pontfolyamatok általában

Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0,\infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk. Egy pontfolyamat egy konkrét realizációja $[0,\infty)$-en többféle ekvivalens módon megadható:

- az érkezési idők listájával: $T_1, T_2, \ldots,$ vagy
- az érkezési időközök listájával: $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ vagy
- a számláló folyamattal: $N(t)$ az érkezések száma 0 és t között.



Pontfolyamatok általában



T_n, τ_n és $N(t)$ között a kapcsolat a következő:

$$T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \qquad \tau_n = T_n - T_{n-1},$$
$$N(t) = \max\{n : T_n < t\}, \qquad T_n = \max\{t : N(t) \leq n - 1\}.$$

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Gondoljuk meg a következőt. Feltéve, hogy t idő már eltelt *esemény nélkül*, "közelebb" jutottunk-e az első eseményhez?

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Gondoljuk meg a következőt. Feltéve, hogy t idő már eltelt *esemény nélkül*, "közelebb" jutottunk-e az első eseményhez?

Tekintsük az autós példát. Ha elkezdjük számolni az utcán elhaladó autókat 9:00-kor (ami legyen most $t = 0$), és az első 1 percben nem halad el autó, akkor az első autóig még hátralévő idő eloszlása ugyanolyan, mint eredetileg, mert az autósokat nem érdekli, hogy mi 9:00-kor vagy 9:01-kor kezdtünk el számolni.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Tehát $T_1 (= \tau_1)$ memóriamentes; arról viszont már tudjuk, hogy akkor exponenciális eloszlású.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Tehát $T_1 (= \tau_1)$ memóriamentes; arról viszont már tudjuk, hogy akkor exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Tehát $T_1(=\tau_1)$ memóriamentes; arról viszont már tudjuk, hogy akkor exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

Ez alapján a folyamatot a következőképpen konstruáljuk meg. A *Poisson pontfolyamat* (vagy röviden Poisson folyamat) egy olyan véletlen pontfolyamat $[0, \infty)$-en, ahol a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ érkezési időközök független, azonos $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlásúak valamely $\lambda > 0$-ra.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Tehát $T_1 (= \tau_1)$ memóriamentes; arról viszont már tudjuk, hogy akkor exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

Ez alapján a folyamatot a következőképpen konstruáljuk meg. A *Poisson pontfolyamat* (vagy röviden Poisson folyamat) egy olyan véletlen pontfolyamat $[0, \infty)$-en, ahol a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ érkezési időközök független, azonos EXP(λ) eloszlásúak valamely $\lambda > 0$-ra.

λ a folyamat *ráta paramétere*. Az egész folyamatra használjuk a PPP(λ) jelölést is.

Na de miért pont Poisson?

Na de miért pont Poisson?

Tétel (Poisson pontfolyamat karakterizációja)

(a) *Egy PPP(λ)-ra teljesülnek a következő tulajdonságok:*

- *Az $[a, b]$ intervallumba eső érkezések számának eloszlása POI($\lambda(b-a)$), és*
- *diszjunkt intervallumba eső érkezések száma független.*

(b) *A fenti két tulajdonság együtt egyértelműen meghatározza PPP(λ)-t. Azaz bármely olyan pontfolyamat, amely kielégíti a fenti két tulajdonságot, ugyanolyan eloszlású, mint PPP(λ).*

Na de miért pont Poisson?

Tétel (Poisson pontfolyamat karakterizációja)

(a) *Egy PPP(λ)-ra teljesülnek a következő tulajdonságok:*
- *Az $[a, b]$ intervallumba eső érkezések számának eloszlása POI($\lambda(b-a)$), és*
- *diszjunkt intervallumba eső érkezések száma független.*

(b) *A fenti két tulajdonság együtt egyértelműen meghatározza PPP(λ)-t. Azaz bármely olyan pontfolyamat, amely kielégíti a fenti két tulajdonságot, ugyanolyan eloszlású, mint PPP(λ).*

Nem biz. (Hosszú számolás.)

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \text{POI}(\lambda(b-a))$.

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$.

Az X valószínűsége változó paramétere és egyúttal várható értéke $\lambda(b-a)$, ami arányos az intervallum hosszával és a ráta paraméterrel is.

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$.

Az X valószínűsége változó paramétere és egyúttal várható értéke $\lambda(b-a)$, ami arányos az intervallum hosszával és a ráta paraméterrel is.

A λ ráta egy sűrűség jellegű paraméter: ha λ nagyobb, a folyamatnak sűrűbben vannak érkezései. Ez egyébként összhangban van azzal, hogy

$$\mathbb{E}(\text{egységnyi hosszú intervallumban az érkezések száma}) = \lambda,$$

$$\mathbb{E}(\text{érkezési időköz}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Unió

Tétel (Unió)

Egy egymástól független $PPP(\lambda_1)$ *és* $PPP(\lambda_2)$ *uniója* $PPP(\lambda_1 + \lambda_2)$*.*

Unió

Tétel (Unió)

Egy egymástól független $PPP(\lambda_1)$ *és* $PPP(\lambda_2)$ *uniója* $PPP(\lambda_1 + \lambda_2)$*.*

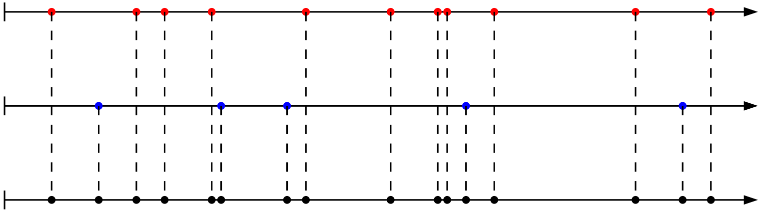
Nem biz.

Unió

Tétel (Unió)

Egy egymástól független $PPP(\lambda_1)$ *és* $PPP(\lambda_2)$ *uniója* $PPP(\lambda_1 + \lambda_2)$*.*

Nem biz.



Ritkítás

Tétel (Ritkítás)

Egy PPP(λ)-ban minden érkezést p valószínűséggel pirossal, $1-p$ valószínűséggel kékkel jelölünk, függetlenül a többi érkezéstől. Ekkor a piros érkezések egy PPP($p\lambda$)-t alkotnak, a kék érkezések egy PPP($(1-p)\lambda$)-t, és a két folyamat független.

Ritkítás

Tétel (Ritkítás)

Egy PPP(λ)-ban minden érkezést p valószínűséggel pirossal, $1-p$ valószínűséggel kékkel jelölünk, függetlenül a többi érkezéstől. Ekkor a piros érkezések egy PPP($p\lambda$)-t alkotnak, a kék érkezések egy PPP($(1-p)\lambda$)-t, és a két folyamat független.

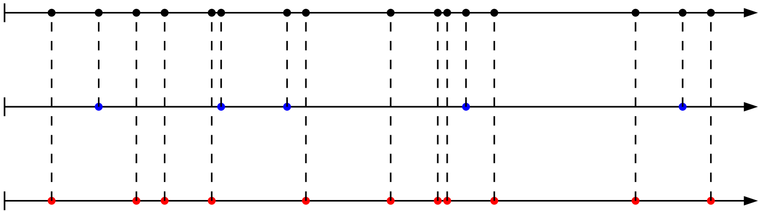
Nem biz.

Ritkítás

Tétel (Ritkítás)

Egy PPP(λ)-ban minden érkezést p valószínűséggel pirossal, $1-p$ valószínűséggel kékkel jelölünk, függetlenül a többi érkezéstől. Ekkor a piros érkezések egy PPP($p\lambda$)-t alkotnak, a kék érkezések egy PPP($(1-p)\lambda$)-t, és a két folyamat független.

Nem biz.



Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek 3/4-e autó, 1/4-e motor.

Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek 3/4-e autó, 1/4-e motor.

Az unió és a ritkítás tétel szerint a fenti információ ekvivalens a következővel:

Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek $3/4$-e autó, $1/4$-e motor.

Az unió és a ritkítás tétel szerint a fenti információ ekvivalens a következővel:

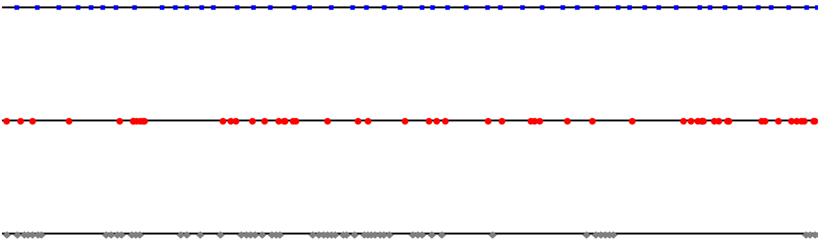
- Átlagosan percenként 3 autó és 1 motor halad el, és az autók és motorok függetlenek.

Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat. Vajon melyik?

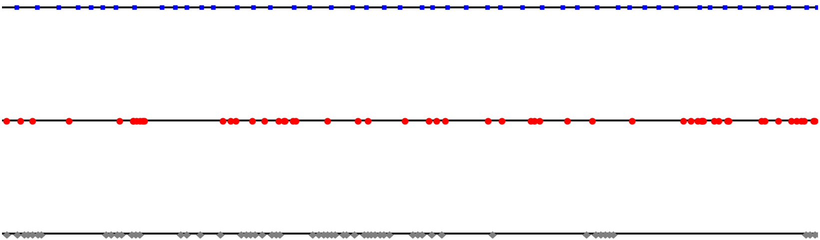
Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat.
Vajon melyik?



Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat. Vajon melyik?



A középső piros a Poisson folyamat. Az első, kék folyamatnál az érkezési időközök túl egyenletesek, míg az utolsó, szürke folyamatnál az érkezések időnként túlságosan összesűrűsödnek, míg máskor nagy szünetek vannak (egyébként az érkezési időköz Pareto eloszlású).

Intervallumon belüli helyzet

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

Intervallumon belüli helyzet

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

A fenti információ ismeretében az éven belül bármikor lehet, így az éven belüli eloszlásra azt várnánk, hogy egyenletes.

Intervallumon belüli helyzet

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

A fenti információ ismeretében az éven belül bármikor lehet, így az éven belüli eloszlásra azt várnánk, hogy egyenletes. Így is van:

Lemma

Ha egy PPP(λ)-nak csak egyetlen érkezése van egy $[a, b]$ intervallumon belül, akkor annak a helyzetének az eloszlása U($[a, b]$).

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

A cél azt belátni, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \frac{c-a}{b-a}$. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)};$$

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

A cél azt belátni, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \frac{c-a}{b-a}$. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)};$$

először a nevezőt számítjuk ki:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a, b]\text{-ben}) = \frac{(\lambda(b-a))^1}{1!} e^{-\lambda(b-a)}$$

mivel az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}(\lambda(b-a))$ eloszlású.

Intervallumon belüli helyzet

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a, c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a, b]\text{-ben}).$$

Intervallumon belüli helyzet

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a,b]\text{-ben}).$$

Az $[a,c]$-beli és $[a,b]$-beli érkezések száma nem független, mert a két intervallum nem diszjunkt. Viszont ezt átfogalmazhatjuk $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumbeli érkezésekre, amik már függetlenek:

Intervallumon belüli helyzet

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a,b]\text{-ben}).$$

Az $[a,c]$-beli és $[a,b]$-beli érkezések száma nem független, mert a két intervallum nem diszjunkt. Viszont ezt átfogalmazhatjuk $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumbeli érkezésekre, amik már függetlenek:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 1\ [a,b]\text{-ben}) =$$
$$\mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 0 \text{ érkezés } [c,b]\text{-ben}) =$$
$$\mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben}) \cdot \mathbb{P}(0 \text{ érkezés } [c,b]\text{-ben}) =$$
$$\frac{(\lambda(c-a))^1}{1!} e^{-\lambda(c-a)} \cdot \frac{(\lambda(b-c))^0}{0!} e^{-\lambda(b-c)} = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)}.$$

Intervallumon belüli helyzet

Tehát

$$\mathbb{P}(B) = \lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)},$$
$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)},$$

Intervallumon belüli helyzet

Tehát

$$\mathbb{P}(B) = \lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)},$$
$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)},$$

ahonnan

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)}}{\lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)}} = \frac{c-a}{b-a},$$

ami pontosan annak a valószínűsége, hogy egy $\mathrm{U}([a,b])$ valószínűségi változó értéke $[a,c]$-be esik.

Intervallumon belüli helyzet

A következő általánosabb tétel is igaz.

Tétel

Feltéve, hogy egy PPP(λ)*-nak k érkezése van az* $[a, b]$ *intervallumban, azok együttes eloszlása megegyezik k darab független U*($[a, b]$) *valószínűségi változó együttes eloszlásával.*

Intervallumon belüli helyzet

A következő általánosabb tétel is igaz.

Tétel

Feltéve, hogy egy $PPP(\lambda)$*-nak* k *érkezése van az* $[a, b]$ *intervallumban, azok együttes eloszlása megegyezik* k *darab független* $U([a, b])$ *valószínűségi változó együttes eloszlásával.*

Nem biz. (Az előzőhöz hasonló számolás.)

Összefoglaló (az eddigiekről)

A PPP(λ)-ra a következők teljesülnek:

- az érkezési időközök EXP(λ) eloszlásúak és függetlenek;
- az $[a, b]$-ba eső érkezések száma POI($\lambda(b-a)$) eloszlású;
- diszjunkt intervallumokban az érkezések száma független;
- független PPP-k uniója is PPP, a ráták összeadódnak;
- egy PPP szétszedhető két független PPP-re úgy, hogy minden érkezés a többitől függetlenül kerül egyik vagy másik PPP-be;
- feltéve, hogy egy intervallumba k pont esik, az együttes eloszlásuk az intervallumon belül független egyenletes.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Legyen adott egy PPP(λ) a $[0, \infty)$-en; az érkezési időközök listája $\tau_1, \tau_2, \ldots$.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Legyen adott egy PPP(λ) a $[0,\infty)$-en; az érkezési időközök listája $\tau_1, \tau_2, \dots$.

Ez kiterjeszthető a teljes számegyenesre a következő módon. Legyenek $\tau_{-1}, \tau_{-2}, \dots$ fae EXP(λ) változók, függetlenek egymástól és $\tau_1, \tau_2, \dots$-től.
A $(-\infty, 0]$-beli érkezések időpontjai

$$
\begin{aligned}
T_{-1} &= -\tau_{-1}, \\
T_{-2} &= -(\tau_{-1} + \tau_{-2}), \\
T_{-3} &= -(\tau_{-1} + \tau_{-2} + \tau_{-3}), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Másrészt minden más érkezési időköz várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\tau_{-i}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Másrészt minden más érkezési időköz várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\tau_{-i}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát a 0-t tartalmazó szakasz átlagosan kétszer olyan hosszú lenne, mint a többi szakasz?

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak.

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Annak a valószínűsége, hogy egy pont egy adott hosszúságú intervallumba esik, arányos az intervallum hosszával is.

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Annak a valószínűsége, hogy egy pont egy adott hosszúságú intervallumba esik, arányos az intervallum hosszával is. Azaz ha az érkezési időköz sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor a 0-t tartalmazó szakasz hosszának sűrűségfüggvénye

$$\tilde{f}(x) = \frac{xf(x)}{\mathbb{E}(\tau_1)}.$$

(Az $\mathbb{E}(\tau_1)$-gyel való osztás csak normalizálás miatt kell.)

Úgy mondjuk, hogy az $\tilde{f}(x)$ sűrűségfüggvény az $f(x)$ sűrűségfüggvény *hossztorzított változata*.

Kitérő: hossztorzítás

Konkrétan ha $\tau_1 \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \tilde{f}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

A fenti $\tilde{f}(x)$ sűrűségfüggvény az Erlang(2,λ) eloszlás sűrűségfüggvénye. Azon túl, hogy ez az eloszlás az EXP(λ) hossztorzított változata, egyúttal teljesül rá az is, hogy

$$\tau_1 + \tau_{-1} \sim \mathrm{Erlang}(2, \lambda),$$

ha τ_1 és τ_{-1} független EXP(λ) eloszlásúak.

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

A második esetben a gyerek nagyobb eséllyel jön sokgyerekes családból. A második kérdésre a válasz pont az első kérdésre adott válasz hossztorzított változata.

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

A második esetben a gyerek nagyobb eséllyel jön sokgyerekes családból. A második kérdésre a válasz pont az első kérdésre adott válasz hossztorzított változata.

Diszkrét valószínűségi változók esetén a hossztorzítás képlete:

$$\mathbb{P}(\tilde{X} = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}(X)}.$$

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

A természetes válasz 5 perc lenne, de ez csak akkor igaz, ha a buszok pontosan 10 percenként követik egymást.

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

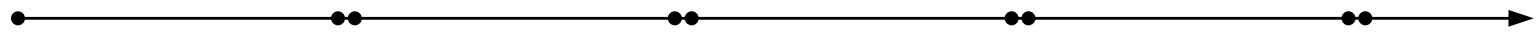
Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

A természetes válasz 5 perc lenne, de ez csak akkor igaz, ha a buszok pontosan 10 percenként követik egymást.

Ha azonban az érkezési időközök véletlenek, akkor vannak hosszabb és rövidebb időközök, és mi nagyobb eséllyel érkezünk egy hosszabb időközbe.

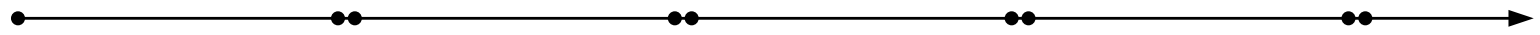
Kitérő: hossztorzítás

Ha konkrétan a buszok úgy járnak, hogy két egymást követő busz jön 1 percen belül, majd 19 perces szünet, és ez a minta ismétlődik:



Kitérő: hossztorzítás

Ha konkrétan a buszok úgy járnak, hogy két egymást követő busz jön 1 percen belül, majd 19 perces szünet, és ez a minta ismétlődik:



Ekkor 95% eséllyel a hosszú időközbe érkezünk, ahol átlagosan 9:30 percet kell várnunk. Mindenestül az átlagos várakozási idő

$$0.95 \times 9{:}30 + 0.05 \times 0{:}30 = 9{:}03$$

perc, ami jelentősen több, mint 5 perc.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Gyakran tűnhet úgy, hogy az a sor, amiben állunk, lassabban halad, mint a többi.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Gyakran tűnhet úgy, hogy az a sor, amiben állunk, lassabban halad, mint a többi.

És tényleg ez a helyzet: átlagosan több időt töltünk lassabb sorokban, pont azért, mert lassabbak.

Ezt a jelenséget úgy is lehet értelmezni, hogy a sorok sebessége *kívülről nézve* más eloszlást követ, mint egy adott sorból *belülről nézve*.

Szimuláció I - exponenciális változókkal

A Poisson-folyamat szimulálható a $[0, t]$ intervallumon úgy, hogy a $\tau_1, \tau_2, \dots$ érkezési időközöket generáljuk függetlenül, EXP(λ) eloszlás szerint. Ekkor az érkezési idők

$$\begin{aligned} T_1 &= \tau_1, \\ T_2 &= \tau_1 + \tau_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elég annyi τ_n-et generálni, amíg $T_n \geq t$-t el nem érjük.

Szimuláció II - Poisson és egyenletes változókkal

Egy másik lehetőség, hogy egy adott intervallumon először a darabszámot generáljuk le, majd azok helyzetét az intervallumon belül.

Az $[a, b]$ intervallumba eső pontok száma $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$. Legeneráljuk először X értékét.

Szimuláció II - Poisson és egyenletes változókkal

Egy másik lehetőség, hogy egy adott intervallumon először a darabszámot generáljuk le, majd azok helyzetét az intervallumon belül.

Az $[a, b]$ intervallumba eső pontok száma $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$. Legeneráljuk először X értékét.

Ezután generálunk X darab független pontot $\mathrm{U}([a, b])$ eloszlás szerint.

Mikor jogos a PPP használata?

Általában a Poisson pontfolyamat használata jogos, ha a következő két feltétel teljesül:

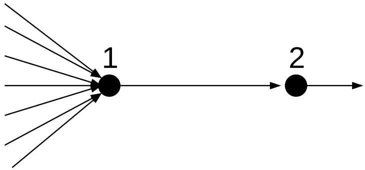
- az érkezések sok független forrásból érkeznek, és
- mindegyik forrás kontribúciója az egészhez képest kicsi.

Mikor jogos a PPP használata?

Általában a Poisson pontfolyamat használata jogos, ha a következő két feltétel teljesül:

- az érkezések sok független forrásból érkeznek, és
- mindegyik forrás kontribúciója az egészhez képest kicsi.

Példa. Az alábbi hálózatban az 1-es szerver esetén a PPP használata jogos, de a 2-es szervernél nem.



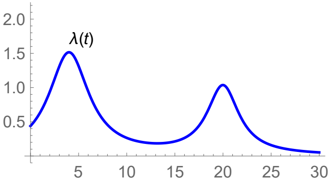
Inhomogén Poisson pontfolyamat

Vannak esetek, amikor az érkezési ráta nem állandó, hanem időben változik. Ilyen helyzetre példa a közlekedés: csúcsidőben az érkezési ráta magasabb, azon kívül viszont alacsonyabb.

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Vannak esetek, amikor az érkezési ráta nem állandó, hanem időben változik. Ilyen helyzetre példa a közlekedés: csúcsidőben az érkezési ráta magasabb, azon kívül viszont alacsonyabb.

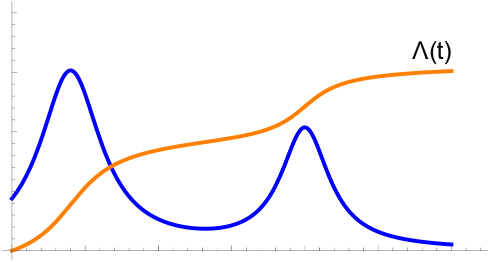
Szeretnénk definiálni olyan Poisson folyamatot, melyre az érkezések egy időben változó $\lambda(t) \geq 0$ rátafüggvény szerint történnek.



Inhomogén Poisson pontfolyamat

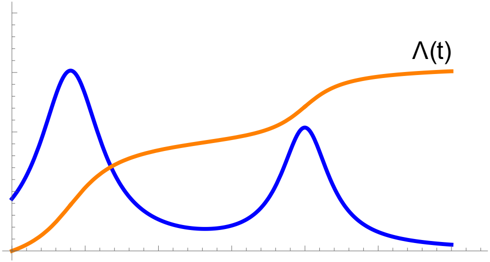
Ezt a következő módon csináljuk. Legyen

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s.$$



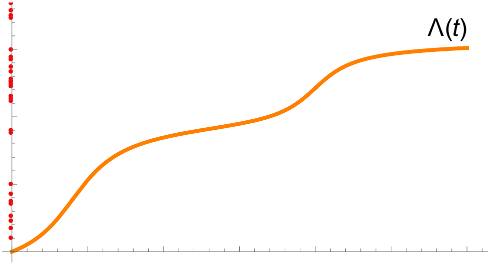
Inhomogén Poisson pontfolyamat

$\Lambda(t)$ növő függvény és a 0-ból indul; amikor $\lambda(t)$ nagyobb, $\Lambda(t)$ gyorsabban nő, amikor $\lambda(t)$ kisebb, $\Lambda(t)$ lassabban nő.



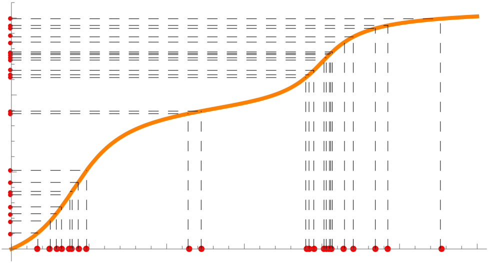
Inhomogén Poisson pontfolyamat

Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ egy PPP(1) érkezései $[0, \infty)$-en. (A grafikonon az y tengely mentén ábrázoltuk őket.)



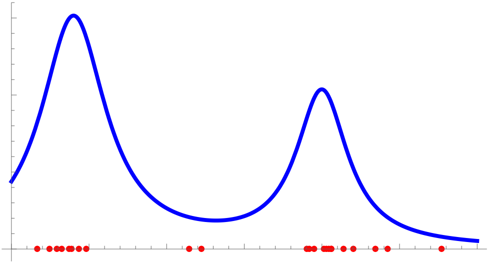
Inhomogén Poisson pontfolyamat

Ekkor a $\Lambda^{-1}(Y_1), \Lambda^{-1}(Y_2), \ldots$ pontok egy $\lambda(t)$ rátafüggvénynek megfelelő inhomogén Poisson folyamatot alkotnak. (Az ábrán le vannak vetítve az x tengelyre a $\Lambda(t)$ függvény grafikonján keresztül.)



Inhomogén Poisson pontfolyamat

A kapott folyamatnak tipikusan több érkezése van ott, ahol $\lambda(t)$ nagyobb, és kevesebb ott, ahol $\lambda(t)$ kisebb.



Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;
- × az érkezési időközök nem exponenciális eloszlásúak;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;
- × az érkezési időközök nem exponenciális eloszlásúak;
- × az érkezési időközök nem függetlenek.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;
- feltéve, hogy k pont esik a tartományba, az együttes eloszlásuk független egyenletes a tartományon belül;

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;
- feltéve, hogy k pont esik a tartományba, az együttes eloszlásuk független egyenletes a tartományon belül;
- egyenletes eloszlást könnyű generálni pl. téglalapokon.