5. Markov populációs folyamatok, terheléselosztás

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/10/02

(1) Markov populációs folyamatok

(2) Példa: terheléselosztás

(3) Mean-field konvergencia

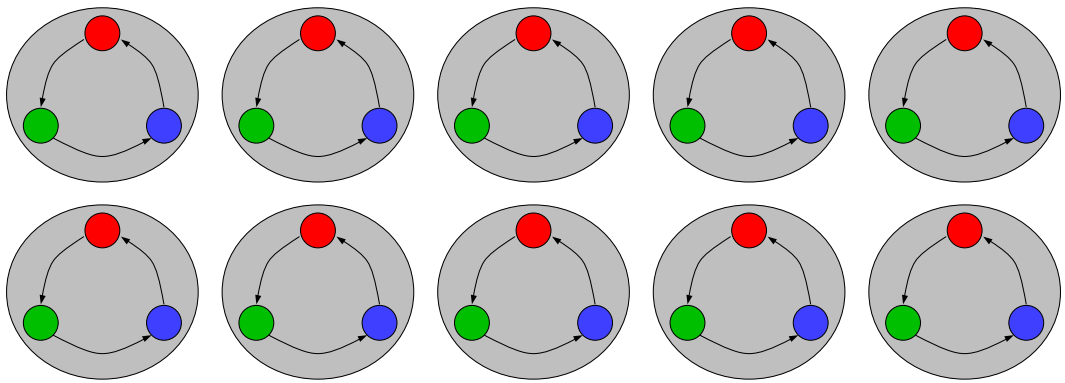
(4) Numerikus diffegyenlet-megoldás

Markov populációs folyamatok

Egy folytonos idejű Markov-láncból vegyünk N példányt, amik párhuzamosan zajlanak. Egyetlen mini Markov-lánc állapottere K méretű, generátora $Q = (r_{ij})_{i,j=1}^{K}$.

Markov populációs folyamatok

Egy folytonos idejű Markov-láncból vegyünk N példányt, amik párhuzamosan zajlanak. Egyetlen mini Markov-lánc állapottere K méretű, generátora $Q = (r_{ij})_{i,j=1}^{K}$.



Markov populációs folyamatok

Hogy lehet egy ilyen rendszer pillanatnyi állapotát leírni?

Markov populációs folyamatok

Hogy lehet egy ilyen rendszer pillanatnyi állapotát leírni?

Egy lehetőség, hogy minden egyes Markov-lánc állapotát nyilvántartjuk („teljes rendszer”). Ekkor az állapottér mérete K^N.

Markov populációs folyamatok

Hogy lehet egy ilyen rendszer pillanatnyi állapotát leírni?

Egy lehetőség, hogy minden egyes Markov-lánc állapotát nyilvántartjuk („teljes rendszer"). Ekkor az állapottér mérete K^N.

Egy másik lehetőség, hogy csak azt tartjuk számon, hogy az egyes állapotokban mennyien tartózkodnak: jelölje $X_k(t)$ a k állapotban tartózkodó Markov-láncok számát t-kor. Ekkor az állapottér

$$\left\{(X_1,\ldots,X_K) : X_k \in \mathbb{Z},\, X_k \geq 0,\, \sum_{k=1}^{K} X_k = N\right\},$$

aminek a mérete N^K nagyságrendű. Ez is nagy (bár kisebb, mint a teljes rendszer), viszont jól strukturált. Ezt fogjuk használni.

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Példa. Legyen $N = 10$ és $K = 3$. $X(t)$-nek az $(5, 3, 2)$ állapotból a lehetséges átmenetei:

- $(5, 3, 2) \to (4, 4, 2)$, ennek rátája

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Példa. Legyen $N = 10$ és $K = 3$. $X(t)$-nek az $(5, 3, 2)$ állapotból a lehetséges átmenetei:

- $(5, 3, 2) \to (4, 4, 2)$, ennek rátája $5r_{12}$,

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Példa. Legyen $N = 10$ és $K = 3$. $X(t)$-nek az $(5, 3, 2)$ állapotból a lehetséges átmenetei:

- $(5, 3, 2) \to (4, 4, 2)$, ennek rátája $5r_{12}$,
- $(5, 3, 2) \to (4, 3, 3)$, ennek rátája

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Példa. Legyen $N = 10$ és $K = 3$. $X(t)$-nek az $(5, 3, 2)$ állapotból a lehetséges átmenetei:

- $(5, 3, 2) \to (4, 4, 2)$, ennek rátája $5r_{12}$,
- $(5, 3, 2) \to (4, 3, 3)$, ennek rátája $5r_{13}$,
- $(5, 3, 2) \to (6, 2, 2)$, ennek rátája

Markov populációs folyamatok

A legegyszerűbb esetben az egyes mini Markov-láncok függetlenül zajlanak. Ilyenkor a Markov-tulajdonság teljesül a teljes rendszerre is, és $X(t)$-re is.

Példa. Legyen $N = 10$ és $K = 3$. $X(t)$-nek az $(5, 3, 2)$ állapotból a lehetséges átmenetei:

- $(5, 3, 2) \to (4, 4, 2)$, ennek rátája $5r_{12}$,
- $(5, 3, 2) \to (4, 3, 3)$, ennek rátája $5r_{13}$,
- $(5, 3, 2) \to (6, 2, 2)$, ennek rátája $3r_{21}$,
- $(5, 3, 2) \to (5, 2, 3)$, ennek rátája $3r_{23}$,
- $(5, 3, 2) \to (6, 3, 1)$, ennek rátája $2r_{31}$,
- $(5, 3, 2) \to (5, 4, 1)$, ennek rátája $2r_{32}$.

Markov populációs folyamatok

Azt szeretnénk, hogy az egyes Markov-láncok ne legyenek függetlenek. Például megengedhetjük, hogy az átmenetráták függjenek a többi Markov-lánc állapotától.

Markov populációs folyamatok

Azt szeretnénk, hogy az egyes Markov-láncok ne legyenek függetlenek. Például megengedhetjük, hogy az átmenetráták függjenek a többi Markov-lánc állapotától.

Ha teljesül, hogy az r_{ij} ráták az

$$x(t) = \frac{X(t)}{N}$$

függvényei, akkor ezt *sűrűségfüggő Markov populációs folyamatnak* hívjuk. $x(t)$ az $X(t)$ normalizált változata, ami azt mondja meg, hogy a Markov-láncok mekkora része van az egyes állapotokban.

Markov populációs folyamatok

Azt szeretnénk, hogy az egyes Markov-láncok ne legyenek függetlenek. Például megengedhetjük, hogy az átmenetráták függjenek a többi Markov-lánc állapotától.

Ha teljesül, hogy az r_{ij} ráták az

$$x(t) = \frac{X(t)}{N}$$

függvényei, akkor ezt *sűrűségfüggő Markov populációs folyamatnak* hívjuk. $x(t)$ az $X(t)$ normalizált változata, ami azt mondja meg, hogy a Markov-láncok mekkora része van az egyes állapotokban.

Ilyenkor az egyes Markov-láncok már nem függetlenek. Fontos: a Markov-tulajdonság teljesül $x(t)$-re!

Példa: terhelés-elosztás

Mi történik, amikor rákattintunk egy YouTube-videóra?

Példa: terhelés-elosztás

Mi történik, amikor rákattintunk egy YouTube-videóra?

Beküldünk egy igényt, amit majd kiszolgál egy szerver. Na de a YouTube-nak sok szervere van, melyikhez kerül a mi igényünk?

Példa: terhelés-elosztás

Mi történik, amikor rákattintunk egy YouTube-videóra?

Beküldünk egy igényt, amit majd kiszolgál egy szerver. Na de a YouTube-nak sok szervere van, melyikhez kerül a mi igényünk?

A beérkező igényeket egy külön szerver (“diszpécser”) továbbítja a tényleges kiszolgáló szerverek valamelyikéhez. A cél az igények minél hatékonyabb kiszolgálása, ehhez sok szempontot igénybe vehet, pl.

- a szerverek leterheltsége
- az igény típusa
- fizikai távolság
- stb.

Terhelés-elosztás

Példa. Mi történik, amikor rákattintunk egy YouTube-videóra?

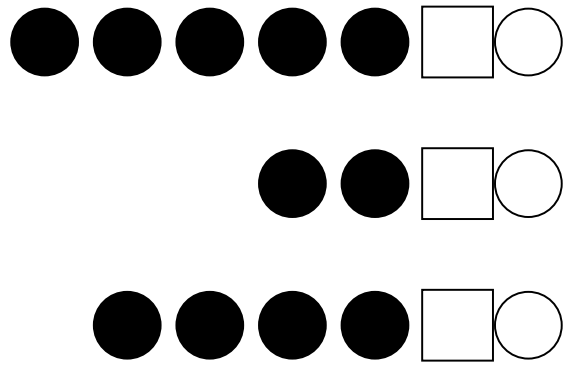
Beküldünk egy igényt, amit majd kiszolgál egy szerver. Na de a YouTube-nak sok szervere van, melyikhez kerül a mi igényünk?

A beérkező igényeket egy külön szerver (“diszpécser”) továbbítja a tényleges kiszolgáló szerverek valamelyikéhez. A cél az igények minél hatékonyabb kiszolgálása, ehhez sok szempontot igénybe vehet, pl.

- **a szerverek leterheltsége**
- az igény típusa
- fizikai távolság
- stb.

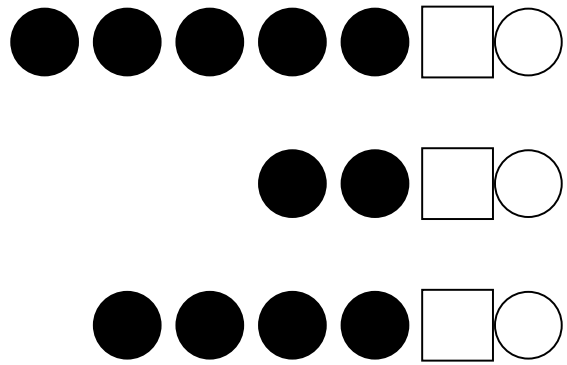
Terhelés-elosztás

Példa. Hasonlóan működnek a kasszák is egy áruházban. Melyik sorba állnánk be a 3 közül?



Terhelés-elosztás

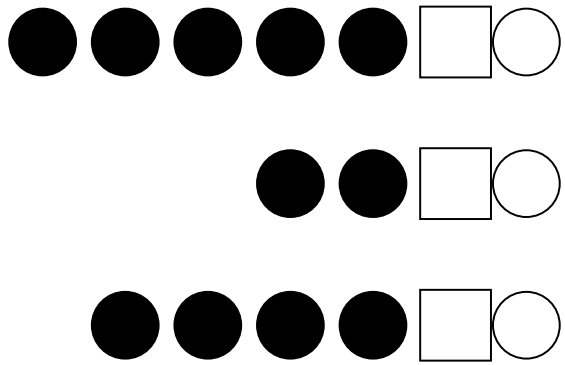
Példa. Hasonlóan működnek a kasszák is egy áruházban. Melyik sorba állnánk be a 3 közül?



Nyilván a legrövidebbhez. Ez a JSQ (Join-Shortest-Queue) néven ismert terhelés-elosztási elv.

Terhelés-elosztás

Példa. Hasonlóan működnek a kasszák is egy áruházban. Melyik sorba állnánk be a 3 közül?

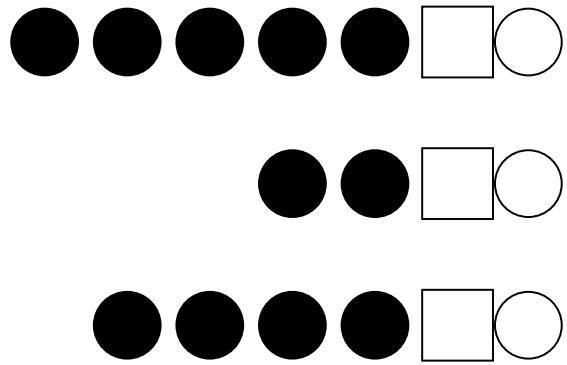


Nyilván a legrövidebbhez. Ez a JSQ (Join-Shortest-Queue) néven ismert terhelés-elosztási elv.

Példa. Amikor autós navigációs alkalmazások alternatív útvonalakat keresnek, az is terhelés-elosztás.

Terhelés-elosztás

Példa. Hasonlóan működnek a kasszák is egy áruházban. Melyik sorba állnánk be a 3 közül?



Nyilván a legrövidebbhez. Ez a JSQ (Join-Shortest-Queue) néven ismert terhelés-elosztási elv.

Példa. Amikor autós navigációs alkalmazások alternatív útvonalakat keresnek, az is terhelés-elosztás.

Erre a helyzetre fogunk matematikai modellt adni.

Terhelés-elosztás

Tekintsük a következő kiszolgáló rendszert. A rendszer N szerverből és egy diszpécserből áll. Az igények mind a diszpécserhez futnak be, amely minden egyes igényt továbbít valamelyik szerverhez valamilyen terhelés-elosztási elv alapján (pl. JSQ).

Terhelés-elosztás

Tekintsük a következő kiszolgáló rendszert. A rendszer N szerverből és egy diszpécserből áll. Az igények mind a diszpécserhez futnak be, amely minden egyes igényt továbbít valamelyik szerverhez valamilyen terhelés-elosztási elv alapján (pl. JSQ).

Minden egyes szervernek van egy sora, amiben a beérkező igényeket tárolja. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szerverek egyformák és véges K nagyságú bufferrel rendelkeznek. (Egyébként ha többféle szerver van, az sem gond.) A diszpécsernek nincs sora, azonnal továbbítja a beérkező igényeket.

Terhelés-elosztás

Tekintsük a következő kiszolgáló rendszert. A rendszer N szerverből és egy diszpécserből áll. Az igények mind a diszpécserhez futnak be, amely minden egyes igényt továbbít valamelyik szerverhez valamilyen terhelés-elosztási elv alapján (pl. JSQ).

Minden egyes szervernek van egy sora, amiben a beérkező igényeket tárolja. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a szerverek egyformák és véges K nagyságú bufferrel rendelkeznek. (Egyébként ha többféle szerver van, az sem gond.) A diszpécsernek nincs sora, azonnal továbbítja a beérkező igényeket.

Feltesszük, hogy a bejövő igények Poisson-folyamat szerint érkeznek λN rátával, valamint a kiszolgálási idő is exponenciális. Ekkor a teljes rendszerre teljesül a Markov-tulajdonság.

Terhelés-elosztás

Egy szerver állapota az, hogy hány igény van a sorában; az egy szerverhez tartozó mini Markov-lánc állapottere $\{0, 1, \ldots, K\}$.

Terhelés-elosztás

Egy szerver állapota az, hogy hány igény van a sorában; az egy szerverhez tartozó mini Markov-lánc állapottere $\{0, 1, \ldots, K\}$.

Ebben az esetben $X_0(t)$ azt jelöli, hogy a t időpontban hány üres szerver van, $X_1(t)$ azt, hogy a t időpontban hány szerverben van 1 igény, és így tovább, egészen $X_K(t)$-ig. Az

$$x(t) = \frac{X(t)}{N}$$

vektor pedig a megfelelő terheltségű szerverek aránya.

Kiszolgálás

A kiszolgálás lehet

- FIFO (First-In-First-Out), mint pl. a bolti sorokban;
- vagy párhuzamos, PS (Processor Sharing), amikor egy szerver több igényt szolgál ki párhuzamosan.

Kiszolgálás

A kiszolgálás lehet

- FIFO (First-In-First-Out), mint pl. a bolti sorokban;
- vagy párhuzamos, PS (Processor Sharing), amikor egy szerver több igényt szolgál ki párhuzamosan.

Feltesszük, hogy minden egyes szervernél a kiszolgálási idő exponenciális. Egy szerver kiszolgálási rátája függhet attól, hogy mennyi a bent lévő igények k száma. Ez főleg PS-nél releváns, amikor egy szerver több igényt hatékonyan tud párhuzamosan kiszolgálni, mint egyet; FIFO esetén a kiszolgálási ráta általában konstans.

Kiszolgálás

A kiszolgálás lehet

- FIFO (First-In-First-Out), mint pl. a bolti sorokban;
- vagy párhuzamos, PS (Processor Sharing), amikor egy szerver több igényt szolgál ki párhuzamosan.

Feltesszük, hogy minden egyes szervernél a kiszolgálási idő exponenciális. Egy szerver kiszolgálási rátája függhet attól, hogy mennyi a bent lévő igények k száma. Ez főleg PS-nél releváns, amikor egy szerver több igényt hatékonyan tud párhuzamosan kiszolgálni, mint egyet; FIFO esetén a kiszolgálási ráta általában konstans.

Feltesszük, hogy a bejövő igények Poisson-folyamat szerint érkeznek λN rátával. Ekkor a teljes rendszer Markov-folyamat.

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),
- egy szerver teljes kiszolgálási rátája a szerverben bent lévő igények számának függvényében:

k	1	2	3	4	5
μ_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),
- egy szerver teljes kiszolgálási rátája a szerverben bent lévő igények számának függvényében:

k	1	2	3	4	5
μ_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4

- $\lambda = 1.25$; az egész rendszerbe az érkezési ráta λN,

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),
- egy szerver teljes kiszolgálási rátája a szerverben bent lévő igények számának függvényében:

k	1	2	3	4	5
μ_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4

- $\lambda = 1.25$; az egész rendszerbe az érkezési ráta λN,
- kezdeti feltétel: üres rendszer,

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),
- egy szerver teljes kiszolgálási rátája a szerverben bent lévő igények számának függvényében:

k	1	2	3	4	5
μ_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4

- $\lambda = 1.25$; az egész rendszerbe az érkezési ráta λN,
- kezdeti feltétel: üres rendszer,
- JSQ terheléselosztás.

Terhelés-elosztás

Példa. Tekintsük a következő paramétereket:

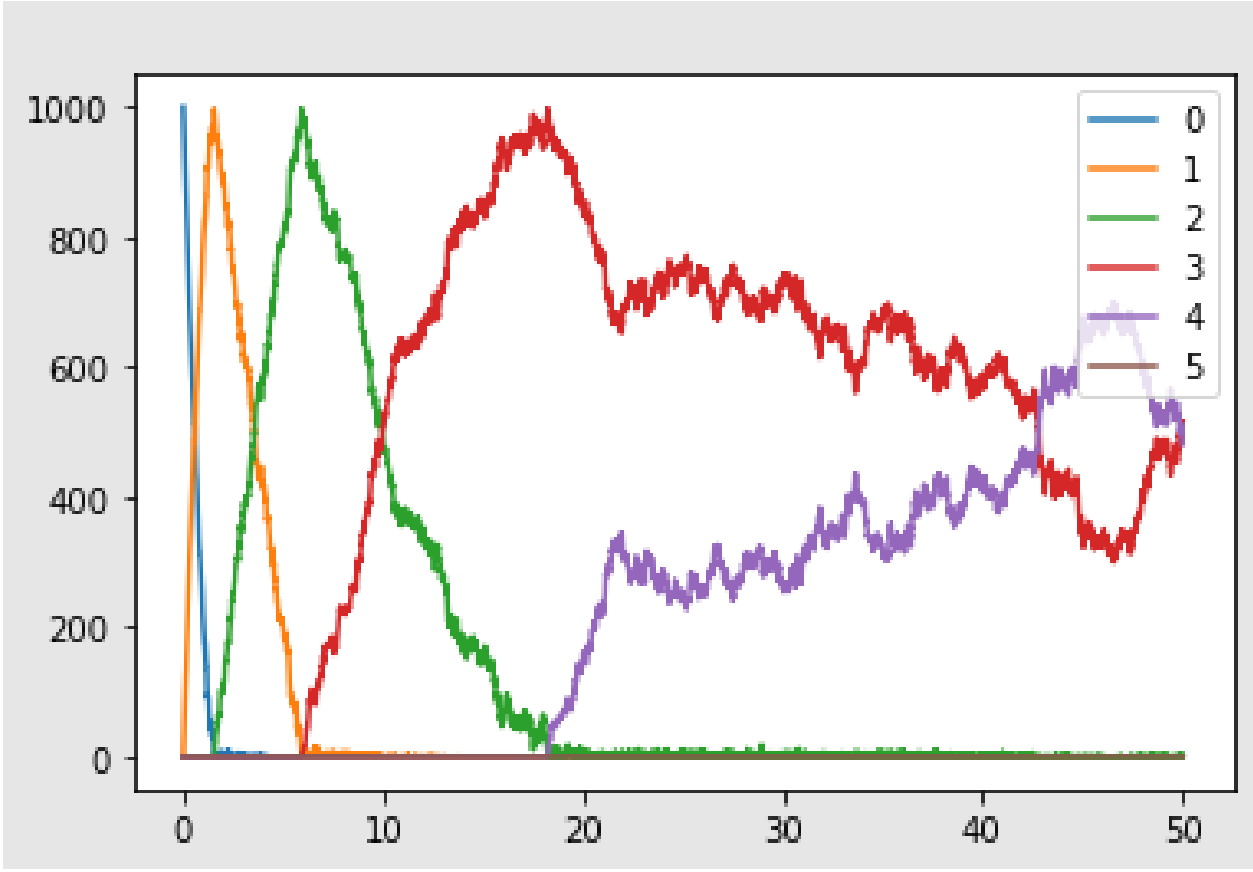
- $N = 1000$ szerver,
- egy szerver maximum 5 igényt szolgál ki egyszerre (ha több igény van bent, a többi sorban áll),
- egy szerver teljes kiszolgálási rátája a szerverben bent lévő igények számának függvényében:

k	1	2	3	4	5
μ_k	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4

- $\lambda = 1.25$; az egész rendszerbe az érkezési ráta λN,
- kezdeti feltétel: üres rendszer,
- JSQ terheléselosztás.

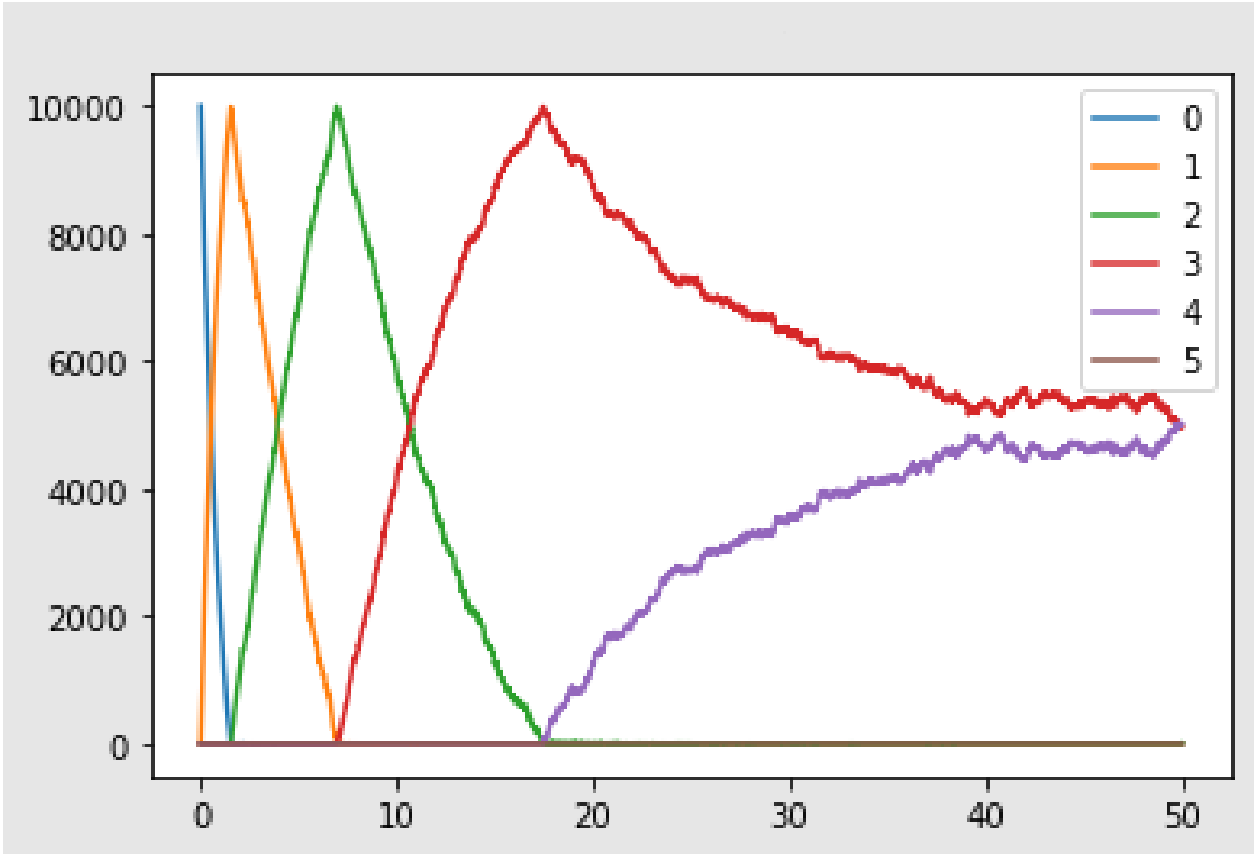
Hogy nézhet ki ennek a rendszer egy realizációja? Gondoljuk meg előre, hogy mit várunk.

Terhelés-elosztás



Terhelés-elosztás

Ugyanez $N = 10000$ szerver esetén:



Mean-field egyenlet-rendszer

A fenti ábra alapján az sejthető, hogy amint $N \to \infty$, a Markov populációs folyamat koncentrálódik valami determinisztikus folyamatra.

Mean-field egyenlet-rendszer

A fenti ábra alapján az sejthető, hogy amint $N \to \infty$, a Markov populációs folyamat koncentrálódik valami determinisztikus folyamatra.

Egy általános sűrűségfüggő Markov populációs folyamathoz tartozó mean-field (térátlag) egyenlet-rendszer a következő:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_k(t) = \sum_{i \neq k} v_i(t) r_{ik}(v(t)) - \sum_{i \neq k} v_k(t) r_{ki}(v(t)), \quad k = 1, \ldots, K$$

Mean-field egyenlet-rendszer

A fenti ábra alapján az sejthető, hogy amint $N \to \infty$, a Markov populációs folyamat koncentrálódik valami determinisztikus folyamatra.

Egy általános sűrűségfüggő Markov populációs folyamathoz tartozó mean-field (térátlag) egyenlet-rendszer a következő:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_k(t) = \sum_{i \neq k} v_i(t) r_{ik}(v(t)) - \sum_{i \neq k} v_k(t) r_{ki}(v(t)), \quad k = 1, \ldots, K$$

Ez egy K-dimenziós közönséges differenciálegyenlet-rendszer. A megoldás általában létezik és egyértelmű.

Kurtz-tétel

Tétel (Kurtz I.)

Tegyük fel, hogy

- $x(0) \to v(0)$ *valószínűségben, amint* $N \to \infty$.

Kurtz-tétel

Tétel (Kurtz I.)

Tegyük fel, hogy

- $x(0) \to v(0)$ *valószínűségben, amint* $N \to \infty$.

Ekkor a mean-field egyenletrendszer $v(t)$ *megoldása egyértelmű, és tetszőleges véges* T*-re és* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{0\le t\le T} \max_{1\le k\le K} |v_k(t) - x_k(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Kurtz-tétel

Tétel (Kurtz I.)

Tegyük fel, hogy

- $x(0) \to v(0)$ *valószínűségben, amint* $N \to \infty$.

Ekkor a mean-field egyenletrendszer $v(t)$ *megoldása egyértelmű, és tetszőleges véges* T*-re és* $\varepsilon > 0$*-ra*

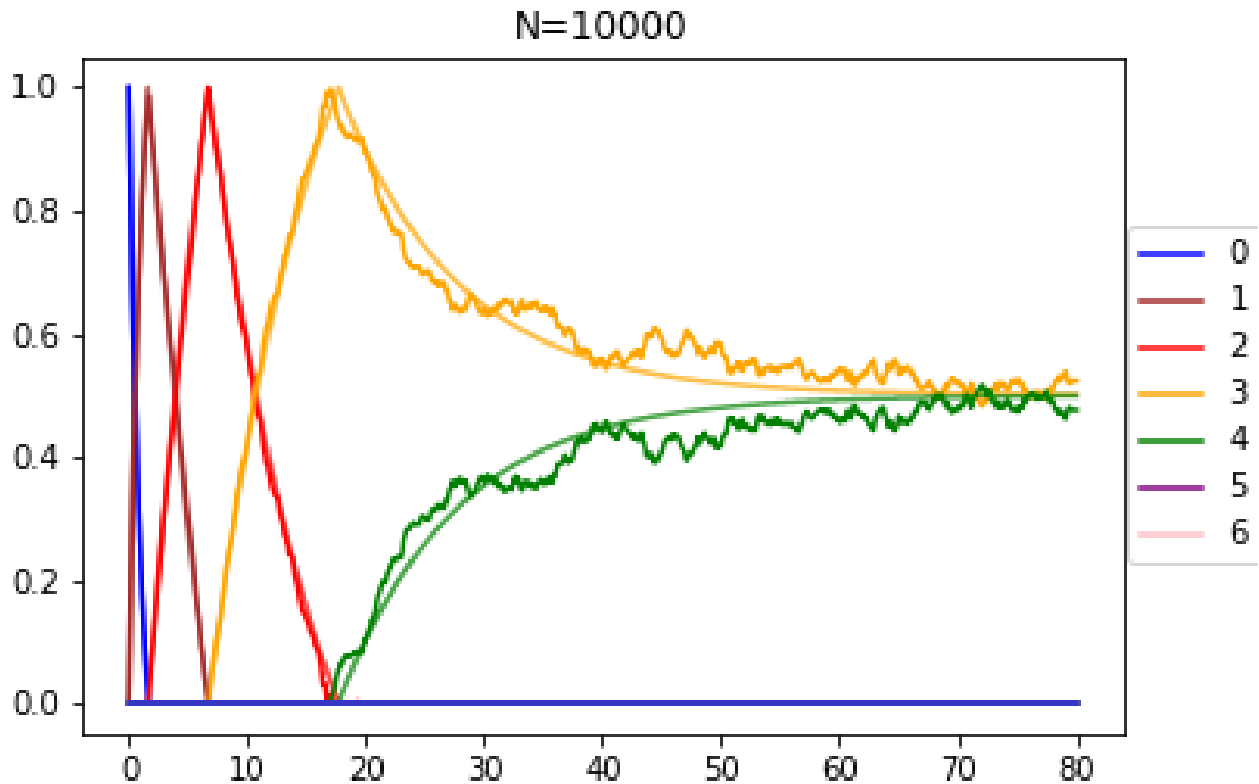
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{0\le t\le T} \max_{1\le k\le K} |v_k(t) - x_k(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

Nem biz.

$v(t)$-t hívjuk a populációs folyamat mean-field limeszének is.

Terhelés-elosztás

$N = 10000$ és a mean-field limesz ($N = \infty$):



Kurtz-tétel

Megjegyzések.

Az, hogy $v(t)$ egy közönséges (és nem pl. egy késleltetett) diffegyenlet-rendszer megoldása, annak felel meg, hogy a mean-field limesz memóriamentes, ami éppen azon múlik, hogy az eredeti populációs folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

Kurtz-tétel

Megjegyzések.

Az, hogy $v(t)$ egy közönséges (és nem pl. egy késleltetett) diffegyenlet-rendszer megoldása, annak felel meg, hogy a mean-field limesz memóriamentes, ami éppen azon múlik, hogy az eredeti populációs folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha az r_{ij} átmenetráták nem folytonos függvények, akkor $v(t)$-nek lehetnek törései – ez általában nem gond, a Kurtz-tétel ilyenkor is teljesül.

Kurtz-tétel

Megjegyzések.

Az, hogy $v(t)$ egy közönséges (és nem pl. egy késleltetett) diffegyenlet-rendszer megoldása, annak felel meg, hogy a mean-field limesz memóriamentes, ami éppen azon múlik, hogy az eredeti populációs folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha az r_{ij} átmenetráták nem folytonos függvények, akkor $v(t)$-nek lehetnek törései – ez általában nem gond, a Kurtz-tétel ilyenkor is teljesül.

A sűrűségfüggő feltevés annak felel meg, hogy minden mini Markov-lánc x^N-et, vagyis a teljes globális állapotot érzékeli. Ha van a populációnak belső struktúrája (pl. ismeretségi körök), akkor általában nem ez a helyzet. Ezzel együtt közelítésnek még ilyen esetben is lehet használni a Kurtz-tételt.

Kurtz-tétel

Megjegyzések.

Az, hogy $v(t)$ egy közönséges (és nem pl. egy késleltetett) diffegyenlet-rendszer megoldása, annak felel meg, hogy a mean-field limesz memóriamentes, ami éppen azon múlik, hogy az eredeti populációs folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha az r_{ij} átmenetráták nem folytonos függvények, akkor $v(t)$-nek lehetnek törései – ez általában nem gond, a Kurtz-tétel ilyenkor is teljesül.

A sűrűségfüggő feltevés annak felel meg, hogy minden mini Markov-lánc x^N-et, vagyis a teljes globális állapotot érzékeli. Ha van a populációnak belső struktúrája (pl. ismeretségi körök), akkor általában nem ez a helyzet. Ezzel együtt közelítésnek még ilyen esetben is lehet használni a Kurtz-tételt.

Mean-field limesz

Mire jó a mean-field limesz vizsgálata?

- nagyméretű rendszerek esetén a teljes rendszer állapottere hatalmas, ehelyett elég egy kisebb méretű diffegyenlet-rendszert vizsgálni, ami numerikusan könnyen megoldható;

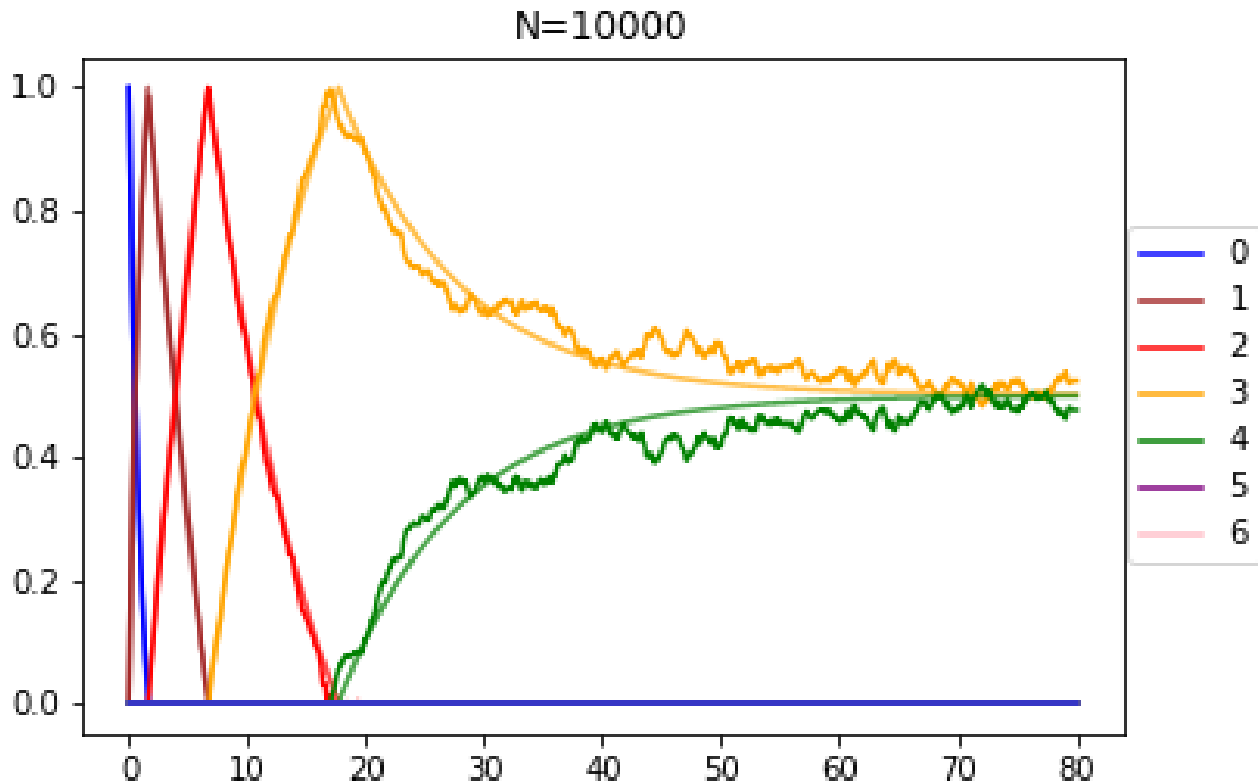
Mean-field limesz

Mire jó a mean-field limesz vizsgálata?

- nagyméretű rendszerek esetén a teljes rendszer állapottere hatalmas, ehelyett elég egy kisebb méretű diffegyenlet-rendszert vizsgálni, ami numerikusan könnyen megoldható;
- sok jellemző definiálható és kiszámítható a mean-field rendszerben is: például a mean-field limesz alapján megbecsülhető, hogy a populációs folyamat mikor éri el a stacionárius állapotát.
- Pl. sorbanállási rendszerek esetén a mean-field limeszben is teljesül a Little-formula, sőt, a kiszolgálási idő teljes eloszlását is ki lehet számítani.

Terhelés-elosztás

$N = 10000$ és a mean-field limesz ($N = \infty$):



Stacionárius eloszlás

Az ábra kétfajta konvergenciát is illusztrál:

- $N \to \infty$ esetén a Markov populációs folyamat tart a mean-field limeszhez a $[0, T]$ intervallumon egyenletesen;

Stacionárius eloszlás

Az ábra kétfajta konvergenciát is illusztrál:

- $N \to \infty$ esetén a Markov populációs folyamat tart a mean-field limeszhez a $[0, T]$ intervallumon egyenletesen;
- $t \to \infty$ esetén a Markov populációs folyamat tart a stacionárius állapotához, a mean-field limesz pedig egy aszimptotikusan stabil fixponthoz (attraktor).

Stacionárius eloszlás

Az ábra kétfajta konvergenciát is illusztrál:

- $N \to \infty$ esetén a Markov populációs folyamat tart a mean-field limeszhez a $[0, T]$ intervallumon egyenletesen;
- $t \to \infty$ esetén a Markov populációs folyamat tart a stacionárius állapotához, a mean-field limesz pedig egy aszimptotikusan stabil fixponthoz (attraktor).

Tétel (Kurtz II.)

Tegyük fel, hogy:

- *minden N-re $x(t)$-nek egyetlen stacionárius eloszlása van, π_N, és*
- *a $v(t)$-t definiáló diffegyenlet-rendszernek egyetlen $(v_1, \ldots, v_K)$ fixpontja van, és az aszimptotikusan stabil.*

Ekkor a π_N eloszlások koncentrálódnak $(v_1, \ldots, v_K)$-ra, amint $N \to \infty$.

Nem biz.

Diszpécser függvény

Vissza a terhelés-elosztáshoz.

A mean-field diffegyenlet-rendszer felírásához szükségünk lesz a különböző hosszúságú sorokban a kiszolgálási rátára és az érkezési rátára is. Az érkezési ráta a teljes rendszerre λN, de az, hogy ez hogyan terhelődik a különböző hosszúságú sorokra, a terhelés-elosztási elven múlik.

Diszpécser függvény

Vissza a terhelés-elosztáshoz.

A mean-field diffegyenlet-rendszer felírásához szükségünk lesz a különböző hosszúságú sorokban a kiszolgálási rátára és az érkezési rátára is. Az érkezési ráta a teljes rendszerre λN, de az, hogy ez hogyan terhelődik a különböző hosszúságú sorokra, a terhelés-elosztási elven múlik.

A terhelés-elosztási elvet az ún. diszpécser-függvény segítségével írjuk le. Jelölje $f_k(x)$ annak a valószínűségét, hogy egy érkező igény k hosszú sorba kerül, feltéve, hogy a normalizált globális állapot x.

Diszpécser függvény

Vissza a terhelés-elosztáshoz.

A mean-field diffegyenlet-rendszer felírásához szükségünk lesz a különböző hosszúságú sorokban a kiszolgálási rátára és az érkezési rátára is. Az érkezési ráta a teljes rendszerre λN, de az, hogy ez hogyan terhelődik a különböző hosszúságú sorokra, a terhelés-elosztási elven múlik.

A terhelés-elosztási elvet az ún. diszpécser-függvény segítségével írjuk le. Jelölje $f_k(x)$ annak a valószínűségét, hogy egy érkező igény k hosszú sorba kerül, feltéve, hogy a normalizált globális állapot x. Pl. JSQ terhelés-elosztási elv esetén:

- ha van k-nál rövidebb sor, akkor k hosszú sorba nem kerül igény;
- ha k hosszú a legrövidebb sor, akkor a beérkező igény 1 valószínűséggel k hosszú sorba kerül,

Diszpécser függvény

Vissza a terhelés-elosztáshoz.

A mean-field diffegyenlet-rendszer felírásához szükségünk lesz a különböző hosszúságú sorokban a kiszolgálási rátára és az érkezési rátára is. Az érkezési ráta a teljes rendszerre λN, de az, hogy ez hogyan terhelődik a különböző hosszúságú sorokra, a terhelés-elosztási elven múlik.

A terhelés-elosztási elvet az ún. diszpécser-függvény segítségével írjuk le. Jelölje $f_k(x)$ annak a valószínűségét, hogy egy érkező igény k hosszú sorba kerül, feltéve, hogy a normalizált globális állapot x. Pl. JSQ terhelés-elosztási elv esetén:

- ha van k-nál rövidebb sor, akkor k hosszú sorba nem kerül igény;
- ha k hosszú a legrövidebb sor, akkor a beérkező igény 1 valószínűséggel k hosszú sorba kerül,

így

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \sum_{i=0}^{k-1} x_i > 0; \\ 1 & \text{ha } \sum_{i=0}^{k-1} x_i = 0 \text{ és } x_k > 0. \end{cases}$$

Diszpécser függvény

- Mi a helyzet, ha a beérkező igényt találomra irányítjuk valamelyik sorba (azaz nem történik érdemi terhelés-elosztás)?

Diszpécser függvény

- Mi a helyzet, ha a beérkező igényt találomra irányítjuk valamelyik sorba (azaz nem történik érdemi terhelés-elosztás)?

  Ekkor egyszerűen

$$f_k(x) = x_k.$$

Diszpécser függvény

- Mi a helyzet, ha a beérkező igényt találomra irányítjuk valamelyik sorba (azaz nem történik érdemi terhelés-elosztás)?

  Ekkor egyszerűen

  $$f_k(x) = x_k.$$

- JSQ(d) terheléselosztásnál a diszpécser kiválaszt d szervert találomra, és azok közül a legrövidebbhez küldi az igényt. Ebben az esetben

Diszpécser függvény

- Mi a helyzet, ha a beérkező igényt találomra irányítjuk valamelyik sorba (azaz nem történik érdemi terhelés-elosztás)?

  Ekkor egyszerűen

  $$f_k(x) = x_k.$$

- JSQ(d) terheléselosztásnál a diszpécser kiválaszt d szervert találomra, és azok közül a legrövidebbhez küldi az igényt. Ebben az esetben

  $$f_k(x) = (x_k + \cdots + x_K)^d - (x_{k+1} + \cdots + x_K)^d.$$

Diszpécser függvény

- Mi a helyzet, ha a beérkező igényt találomra irányítjuk valamelyik sorba (azaz nem történik érdemi terhelés-elosztás)?

  Ekkor egyszerűen

  $$f_k(x) = x_k.$$

- JSQ(d) terheléselosztásnál a diszpécser kiválaszt d szervert találomra, és azok közül a legrövidebbhez küldi az igényt. Ebben az esetben

  $$f_k(x) = (x_k + \cdots + x_K)^d - (x_{k+1} + \cdots + x_K)^d.$$

  Az $(f_0(x), \ldots, f_K(x))$ függvényeket kollektíven diszpécser-függvénynek nevezzük.

Mean-field limesz

A diszpécser függvény segítségével fel tudjuk írni a mean-field egyenletrendszert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_k(t) = \lambda f_{k-1}(v(t)) v_{k-1}(t) - \lambda f_k(v(t)) v_k(t) + \\ + \mu_{k+1} v_{k+1}(t) - \mu_k v_k(t) \qquad (k = 0, \ldots, K);$$

a jobboldalon az egyes tagok annak felelnek meg, hogy a k hosszú sorok száma megváltozik, ha...

- érkezés történik $k-1$ hosszú sorba, vagy
- érkezés történik k hosszú sorba, vagy
- kiszolgálás történik $k+1$ hosszú sorban, vagy
- kiszolgálás történik k hosszú sorban.

Stabil fixpont

A korábbi példában a stabil fixpont könnyen kiszámítható.
$\lambda = 1.25$ félúton van $\mu_3 = 1.2$ és $\mu_4 = 1.3$ között, így a fixpont

$$v = (0\ 0\ 0\ 0.5\ 0.5\ 0).$$

Stabil fixpont

A korábbi példában a stabil fixpont könnyen kiszámítható.
$\lambda = 1.25$ félúton van $\mu_3 = 1.2$ és $\mu_4 = 1.3$ között, így a fixpont

$$v = (0\ 0\ 0\ 0.5\ 0.5\ 0).$$

Használjuk a Little-formulát.

Stabil fixpont

A korábbi példában a stabil fixpont könnyen kiszámítható.
$\lambda = 1.25$ félúton van $\mu_3 = 1.2$ és $\mu_4 = 1.3$ között, így a fixpont

$$v = (0\ 0\ 0\ 0.5\ 0.5\ 0).$$

Használjuk a Little-formulát.
Nincs adatvesztés, tehát az effektív érkezési ráta

$$\lambda = \lambda_e = 1.25,$$

Stabil fixpont

A korábbi példában a stabil fixpont könnyen kiszámítható.
$\lambda = 1.25$ félúton van $\mu_3 = 1.2$ és $\mu_4 = 1.3$ között, így a fixpont

$$v = (0\ 0\ 0\ 0.5\ 0.5\ 0).$$

Használjuk a Little-formulát.
Nincs adatvesztés, tehát az effektív érkezési ráta

$$\lambda = \lambda_e = 1.25,$$

az átlagos sorhossz

$$L = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 4 = 3.5,$$

és így az átlagos kiszolgálási idő

$$W = L/\lambda_e = 2.8.$$

Mean-field stacionárius állapot

A π stabil fixpontot mean-field stacionárius állapotnak is hívjuk (mert megfelel annak, hogy a $t \to \infty$ és $N \to \infty$ limeszt is vesszük). Hogyan lehet kiszámítani általában?

Mean-field stacionárius állapot

A π stabil fixpontot mean-field stacionárius állapotnak is hívjuk (mert megfelel annak, hogy a $t \to \infty$ és $N \to \infty$ limeszt is vesszük). Hogyan lehet kiszámítani általában?

1. módszer: megoldjuk numerikusan a mean-field differenciálegyenlet-rendszert, majd veszünk egy nagy t értéket. (Mivel a megoldás $t \to \infty$ esetén a mean-field stacionárius állapothoz konvergál, ezért nagy t-re már közel lesz hozzá.)

Mean-field stacionárius állapot

A π stabil fixpontot mean-field stacionárius állapotnak is hívjuk (mert megfelel annak, hogy a $t \to \infty$ és $N \to \infty$ limeszt is vesszük). Hogyan lehet kiszámítani általában?

1. módszer: megoldjuk numerikusan a mean-field differenciálegyenlet-rendszert, majd veszünk egy nagy t értéket. (Mivel a megoldás $t \to \infty$ esetén a mean-field stacionárius állapothoz konvergál, ezért nagy t-re már közel lesz hozzá.)

2. módszer: dinamikus egyensúly egyenletekből.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Jelölje π a mean-field stacionárius eloszlást. Ha az $f_k(x)$ diszpécser függvények folytonosak π-ben, akkor a dinamikus egyensúly egyenletek:

$$\lambda f_k(\pi) = \mu_{k+1}\pi_{k+1} \qquad k = 0, \ldots, K-1.$$

Dinamikus egyensúly egyenletek

Jelölje π a mean-field stacionárius eloszlást. Ha az $f_k(x)$ diszpécser függvények folytonosak π-ben, akkor a dinamikus egyensúly egyenletek:

$$\lambda f_k(\pi) = \mu_{k+1}\pi_{k+1} \qquad k = 0, \ldots, K-1.$$

Ez egy algebrai egyenlet-rendszer $(\pi_0, \ldots, \pi_K)$-ra; attól függően, hogy az f diszpécser függvény és a μ_k kiszolgálási ráta görbe mennyire egyszerű vagy bonyolult, ennek a megoldása is lehet egyszerű vagy bonyolult.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Ha a diszpécser függvény nem folytonos π-ben (pl. a JSQ ilyen), akkor a helyzet némileg más. JSQ esetén a stabil fixpontban csak kétféle sorhossz valószínűsége pozitív: i_0 és $i_0 - 1$, ahol i_0 a legkisebb olyan sorhossz, amire

$$\mu_{i_0} \geq \lambda.$$

A korábbi példában $i_0 = 3$ volt.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Ha a diszpécser függvény nem folytonos π-ben (pl. a JSQ ilyen), akkor a helyzet némileg más. JSQ esetén a stabil fixpontban csak kétféle sorhossz valószínűsége pozitív: i_0 és $i_0 - 1$, ahol i_0 a legkisebb olyan sorhossz, amire

$$\mu_{i_0} \geq \lambda.$$

A korábbi példában $i_0 = 3$ volt.

Mi történik, ha egy szerver befejezi az igény kiszolgálását?

Dinamikus egyensúly egyenletek

Ha a diszpécser függvény nem folytonos π-ben (pl. a JSQ ilyen), akkor a helyzet némileg más. JSQ esetén a stabil fixpontban csak kétféle sorhossz valószínűsége pozitív: i_0 és $i_0 - 1$, ahol i_0 a legkisebb olyan sorhossz, amire

$$\mu_{i_0} \geq \lambda.$$

A korábbi példában $i_0 = 3$ volt.

Mi történik, ha egy szerver befejezi az igény kiszolgálását?

Ha ez egy i_0 hosszú sorban történt, akkor a sor hossza $i_0 - 1$ lesz, de ezen kívül semmi különleges nem történik.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Ha a diszpécser függvény nem folytonos π-ben (pl. a JSQ ilyen), akkor a helyzet némileg más. JSQ esetén a stabil fixpontban csak kétféle sorhossz valószínűsége pozitív: i_0 és $i_0 - 1$, ahol i_0 a legkisebb olyan sorhossz, amire

$$\mu_{i_0} \geq \lambda.$$

A korábbi példában $i_0 = 3$ volt.

Mi történik, ha egy szerver befejezi az igény kiszolgálását?

Ha ez egy i_0 hosszú sorban történt, akkor a sor hossza $i_0 - 1$ lesz, de ezen kívül semmi különleges nem történik.

Ha viszont a kiszolgálás egy $i_0 - 1$ hosszú sorban történt, akkor a sor hossza $i_0 - 2$-re változik, ami rövidebb, mint az összes többi sor, és JSQ miatt ilyenkor a következő igényt fixen ebbe a sorba irányítja a diszpécser. Viszont a mean-field limeszben az igények végtelen sűrűséggel érkeznek $\rightarrow$ ez a sor azonnal visszatöltődik $i_0 - 1$ hosszúságra.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Összességében $i_0 - 2$ hosszú sort nem látunk pozitív ideig, tehát a mean field stacionárius eloszlásban továbbra is csak két sorhossz valószínűsége pozitív, $i_0 - 1$ és i_0 hossza.

De ettől még az igények pozitív arányú része fog ilyen 'instant diszpécselés' keretében egy olyan sorba kerülni, ami az adott pillanatban rövidebb volt, mint az összes többi.

Dinamikus egyensúly egyenletek

Összességében $i_0 - 2$ hosszú sort nem látunk pozitív ideig, tehát a mean field stacionárius eloszlásban továbbra is csak két sorhossz valószínűsége pozitív, $i_0 - 1$ és i_0 hossza.

De ettől még az igények pozitív arányú része fog ilyen 'instant diszpécselés' keretében egy olyan sorba kerülni, ami az adott pillanatban rövidebb volt, mint az összes többi.

Az $i_0 - 1$ hosszú sorokban a kiszolgálási ráta összesen

$$\lambda_u = \pi_{i_0-1}\mu_{i_0-1},$$

emiatt a teljes bejövő λ érkezési ráta ekkora része fog arra fordítódni, hogy az $i_0 - 1$ hosszú sorokban a kiszolgálást ellensúlyozza, és visszatöltse őket instant $i_0 - 1$ hosszúságra (az u betű az "upkeep" rövidítése).

Dinamikus egyensúly egyenletek

A maradék $\lambda - \lambda_u$ érkezési ráta az $i_0 - 1$ sorokat fogja i_0 hosszúságúra tölteni; a dinamikus egyensúly egyenlet szerint ez egyensúlyban van az i_0 hosszú sorokban történő kiszolgálással. Ennek megfelelően JSQ esetén a dinamikus egyensúly egyenlet a következő alakú:

$$(\lambda - \lambda_u) f_{i_0-1}(\pi) = \mu_{i_0} \pi_{i_0}.$$

Dinamikus egyensúly egyenletek

A maradék $\lambda - \lambda_u$ érkezési ráta az $i_0 - 1$ sorokat fogja i_0 hosszúságúra tölteni; a dinamikus egyensúly egyenlet szerint ez egyensúlyban van az i_0 hosszú sorokban történő kiszolgálással. Ennek megfelelően JSQ esetén a dinamikus egyensúly egyenlet a következő alakú:

$$(\lambda - \lambda_u) f_{i_0 - 1}(\pi) = \mu_{i_0} \pi_{i_0}.$$

Ez nemcsak JSQ esetén van így; általában akkor van upkeep, ha a diszpécser függvény nem folytonos a π mean field stacionárius állapotban. A dinamikus egyensúly egyenletek általános alakja ilyenkor

$$(\lambda - \lambda_u) f_k(\pi) = \mu_{k+1} \pi_{k+1} \qquad k = 0, \ldots, K - 1.$$

Numerikus diffegyenlet-megoldás

A másik lehetőség π kiszámítására, hogy megoldjuk a mean-field diffegyenlet-rendszert numerikusan, majd behelyettesítünk egy nagy t értéket.

Következőnek azt nézzük meg, hogyan lehet diffegyenleteket numerikusan megoldani.

Numerikus diffegyenlet-megoldás

A másik lehetőség π kiszámítására, hogy megoldjuk a mean-field diffegyenlet-rendszert numerikusan, majd behelyettesítünk egy nagy t értéket.

Következőnek azt nézzük meg, hogyan lehet diffegyenleteket numerikusan megoldani.

A legegyszerűbb esetben a

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F(x(t)) \qquad x(0) = x_0$$

alakú egyenletet akarjuk megoldani, ahol $x(t)$ a (még ismeretlen) megoldás, $F(.)$ az ún. vezérlő függvény, x_0 pedig a kezdeti feltétel. F és x_0 ismert.

Euler-módszer

Az Euler-módszer a következő: legyen $h > 0$ egy kicsi, de rögzített érték (pl. $h = 0.001$), ez lesz a lépésköz; ha már $x(t)$-re van egy közelítésünk, akkor a $t + h$ pontban a megoldást a következő formulával közelítjük:

$$x(t + h) \approx x(t) + hF(x(t)).$$

Euler-módszer

Az Euler-módszer a következő: legyen $h > 0$ egy kicsi, de rögzített érték (pl. $h = 0.001$), ez lesz a lépésköz; ha már $x(t)$-re van egy közelítésünk, akkor a $t + h$ pontban a megoldást a következő formulával közelítjük:

$$x(t + h) \approx x(t) + hF(x(t)).$$

Ezzel az $x(0) = x_0$-ból indulva megkaphatjuk az $x(t)$ függvény egy közelítését a $h, 2h, \ldots$ pontokban.

Euler-módszer

Az Euler-módszer a következő: legyen $h > 0$ egy kicsi, de rögzített érték (pl. $h = 0.001$), ez lesz a lépésköz; ha már $x(t)$-re van egy közelítésünk, akkor a $t + h$ pontban a megoldást a következő formulával közelítjük:

$$x(t + h) \approx x(t) + hF(x(t)).$$

Ezzel az $x(0) = x_0$-ból indulva megkaphatjuk az $x(t)$ függvény egy közelítését a $h, 2h, \ldots$ pontokban.

Mekkora a közelítés hibája? Az Euler-módszer egy lépésben h^2 nagyságrendű hibát vét; ha egy $[0, T]$ intervallumon szeretnénk a megoldást megkapni, akkor ehhez T/h lépésre van szükség, és a teljes hiba $[0, T]$-n h nagyságrendű lesz.

Euler-módszer

Az Euler-módszer a következő: legyen $h > 0$ egy kicsi, de rögzített érték (pl. $h = 0.001$), ez lesz a lépésköz; ha már $x(t)$-re van egy közelítésünk, akkor a $t + h$ pontban a megoldást a következő formulával közelítjük:

$$x(t + h) \approx x(t) + hF(x(t)).$$

Ezzel az $x(0) = x_0$-ból indulva megkaphatjuk az $x(t)$ függvény egy közelítését a $h, 2h, \ldots$ pontokban.

Mekkora a közelítés hibája? Az Euler-módszer egy lépésben h^2 nagyságrendű hibát vét; ha egy $[0, T]$ intervallumon szeretnénk a megoldást megkapni, akkor ehhez T/h lépésre van szükség, és a teljes hiba $[0, T]$-n h nagyságrendű lesz.

Úgy is mondjuk, hogy az Euler-módszer elsőrendű módszer, mert a hibája h csökkentésével elsőrendben csökken.

Javított Euler-módszer

Lehet jobbat csinálni. A javított Euler-módszer (midpoint method) a következő közelítést használja:

$$x(t+h) \approx x(t) + hF\left(x(t) + \frac{h}{2}F(x(t))\right).$$

Ennek a hibája egy lépésben h^3 nagyságrendű, egy $[0, T]$ intervallum alatt pedig az össz hiba h^2 nagyságrendű; a javított Euler-módszer másodrendű módszer.

Javított Euler-módszer

Lehet jobbat csinálni. A javított Euler-módszer (midpoint method) a következő közelítést használja:

$$x(t+h) \approx x(t) + hF\left(x(t) + \frac{h}{2}F(x(t))\right).$$

Ennek a hibája egy lépésben h^3 nagyságrendű, egy $[0, T]$ intervallum alatt pedig az össz hiba h^2 nagyságrendű; a javított Euler-módszer másodrendű módszer.

h csökkentésével mindkét módszer pontossága javul (de a javított Euler-módszeré gyorsabban), viszont az eljárás futásideje növekszik. Cserébe viszont a javított Euler-módszert bonyolultabb lekódolni. A gyakorlatban az, hogy Euler-módszert vagy javított Euler-módszert érdemes használni, attól is függ, mennyire pontosan van szükségünk a megoldásra, és attól is, mennyire költséges az iterációt futtatni.

Javított Euler-módszer

Lehet jobbat csinálni. A javított Euler-módszer (midpoint method) a következő közelítést használja:

$$x(t+h) \approx x(t) + hF\left(x(t) + \frac{h}{2}F(x(t))\right).$$

Ennek a hibája egy lépésben h^3 nagyságrendű, egy $[0, T]$ intervallum alatt pedig az össz hiba h^2 nagyságrendű; a javított Euler-módszer másodrendű módszer.

h csökkentésével mindkét módszer pontossága javul (de a javított Euler-módszeré gyorsabban), viszont az eljárás futásideje növekszik. Cserébe viszont a javított Euler-módszert bonyolultabb lekódolni. A gyakorlatban az, hogy Euler-módszert vagy javított Euler-módszert érdemes használni, attól is függ, mennyire pontosan van szükségünk a megoldásra, és attól is, mennyire költséges az iterációt futtatni.

Vannak további módszerek is numerikus diffegyenlet-megoldásra, az általános keret Runge-Kutta módszerek néven fut.

Egyenlet-rendszer

Mi a helyzet, ha nem csak egy diffegyenletet szeretnénk megoldani, hanem egy diffegyenlet-rendszert?

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = F_i(x(t)) \qquad i = 1, \ldots, K$$

Egyenlet-rendszer

Mi a helyzet, ha nem csak egy diffegyenletet szeretnénk megoldani, hanem egy diffegyenlet-rendszert?

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = F_i(x(t)) \qquad i = 1, \ldots, K$$

Az Euler-módszer és a javított Euler-módszer is gond nélkül alkalmazható: az Euler-módszerre

$$x_i(t+h) \approx x_i(t) + hF_i(x(t)) \qquad i = 1, \ldots, K,$$

a javított Euler-módszerre

$$x_i(t+h) \approx x_i(t) + hF_i\left(x_i(t) + \frac{h}{2}F_i(x(t))\right) \qquad i = 1, \ldots, K.$$

Nem folytonos vezérlő függvény

Mi a helyzet, ha az F vezérlő függvény nem folytonos?

Nem folytonos vezérlő függvény

Mi a helyzet, ha az F vezérlő függvény nem folytonos?

A szakadási ponton való áthaladást kezelnünk kell. Ha az F függvény szakad egy y pontban, és

$$x(t) < y < x(t) + hF(x(t)),$$

akkor egy h nagyságú lépéssel már túlhaladnánk a szakadási ponton. Ehelyett legyen

$$h' = \frac{y - x(t)}{F(x(t))}.$$

Nem folytonos vezérlő függvény

Ha a t időpontból csak h' nagyságú lépést teszünk előre, akkor ez az $x(t)$ megoldást az F szakadási pontjába visz, azaz

$$x(t + h') \approx y,$$

és onnantól előrefelé már haladhatunk az F szakadási pont utáni értéke szerint;

Nem folytonos vezérlő függvény

Ha a t időpontból csak h' nagyságú lépést teszünk előre, akkor ez az $x(t)$ megoldást az F szakadási pontjába visz, azaz

$$x(t + h') \approx y,$$

és onnantól előrefelé már haladhatunk az F szakadási pont utáni értéke szerint;ha F-nek az y pontban a baloldali határértéke $F_-(y)$, a jobboldali $F_+(y)$, és felfelé léptük át a szakadási pontot F-ben, akkor

$$x((t + h') + h) \approx x(t + h') + hF_+(y),$$

míg ha lefelé léptük át a szakadási pontot, akkor $F_-(y)$-t kell venni a jobb oldalon.

Nem folytonos vezérlő függvény

Ha a t időpontból csak h' nagyságú lépést teszünk előre, akkor ez az $x(t)$ megoldást az F szakadási pontjába visz, azaz

$$x(t + h') \approx y,$$

és onnantól előrefelé már haladhatunk az F szakadási pont utáni értéke szerint;ha F-nek az y pontban a baloldali határértéke $F_-(y)$, a jobboldali $F_+(y)$, és felfelé léptük át a szakadási pontot F-ben, akkor

$$x((t + h') + h) \approx x(t + h') + hF_+(y),$$

míg ha lefelé léptük át a szakadási pontot, akkor $F_-(y)$-t kell venni a jobb oldalon.

Vagy ha szeretnénk továbbra is az nh alakú pontokban közelíteni, akkor a h' nagyságú lépés után tehetünk még egy $h - h'$ nagyságú lépést. Azután haladhatunk tovább előre ismét h nagyságú lépésekkel.

Nem folytonos vezérlő függvény

A szakadási pont átlépését úgymond az Euler-módszer szerint kezeltük, ennek megfelelően egy átlépésnél h^2 nagyságrendű a közelítés hibája.

Nem folytonos vezérlő függvény

A szakadási pont átlépését úgymond az Euler-módszer szerint kezeltük, ennek megfelelően egy átlépésnél h^2 nagyságrendű a közelítés hibája.

Egy $[0, T]$ intervallumon általában csak egy (vagy néhány, de fix számú) szakadási pont van, ezért a fenti átlépési módszert használhatjuk még akkor is, ha egyébként a folytonos részeken a javított Euler-módszert használjuk, mert az össz hiba így is h^2 nagyságrendű marad.