7. Sorbanállási hálózatok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/10/16

Vázlat

(1) Sorbanállási hálózatok
(2) Emlékeztető: Markov-sorok
(3) Kimenő folyamat, Burke-tétel
(4) Jackson-hálózatok
(5) Stabilitási feltétel, forgalmi egyenlet
(6) Stacionárius eloszlás
(7) Zárt hálózatok

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

A másik lehetőség a *zárt* hálózat, ilyenkor nincsenek a rendszerből távozó és érkező igények, hanem a bent lévő igények száma állandó.

Sorbanállási hálózatok

Tipikus kérdések:

- stabilitás feltétele az egész rendszerre;
- a rendszer stacionárius állapota;
- az egyes csomóponti szerverek átlagos kihasználtsága
- átlagos késleltetés az egyes csomópontoknál és az egész rendszerre;
- rendszerben töltött idő eloszlása;
- stb.

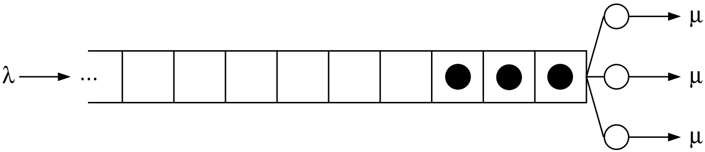
M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.

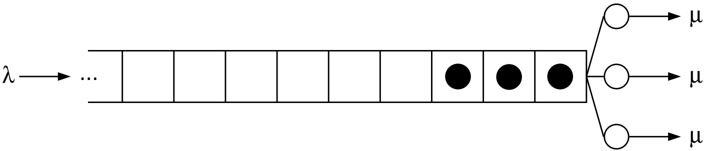
Az M/M/c sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.

Az M/M/c sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



Az M/M/∞ sorban minden igény azonnal elkezd fix μ rátájú kiszolgálást kapni. (A gyakorlatban ez annak felel meg, amikor egy M/M/c sorban c értéke extrém nagy.)

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Tekintsünk egy M/M/1, M/M/c vagy M/M/∞ sort λ érkezési rátával. Egy szerver kiszolgálási rátája μ.

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Tekintsünk egy M/M/1, M/M/c vagy M/M/∞ sort λ érkezési rátával. Egy szerver kiszolgálási rátája μ.

Lemma

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1 - \rho)$.*

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Tekintsünk egy M/M/1, M/M/c vagy M/M/∞ sort λ érkezési rátával. Egy szerver kiszolgálási rátája μ.

Lemma

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.*

(b) *Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása*

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1},$$

$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 < k \le c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \ge c. \end{cases}$$

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Tekintsünk egy M/M/1, M/M/c vagy M/M/∞ sort λ érkezési rátával. Egy szerver kiszolgálási rátája μ.

Lemma

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.*

(b) *Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása*

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1},$$

$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 < k \le c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \ge c. \end{cases}$$

(c) *Egy M/M/∞ sor mindig stabil, és a stacionárius eloszlása POI(λ/μ).*

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Biz.

(a) Már volt, a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik.

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Biz.

(a) Már volt, a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \geq c; \end{cases}$$

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Biz.

(a) Már volt, a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \geq c; \end{cases}$$

innen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} k\mu/\lambda & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu/\lambda & \text{ha } k \geq c, \end{cases}$$

amit már csak rendezni és normálni kell.

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Biz.

(a) Már volt, a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \le c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \ge c; \end{cases}$$

innen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} k\mu/\lambda & \text{ha } k \le c-1, \\ c\mu/\lambda & \text{ha } k \ge c, \end{cases}$$

amit már csak rendezni és normálni kell.

(c) (b) rész x_k képlete, csak most nincs $k \ge c$ eset.

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Illetve annyiban igen, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Kimenő folyamat

Biz. (M/M/1 sorra, vázlat.)

Emlékeztető: a sorhossz stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Kimenő folyamat

Biz. (M/M/1 sorra, vázlat.)

Emlékeztető: a sorhossz stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Laplace-transzformáltak segítségével kiszámítjuk a távozási időközök eloszlását. Két eset lehetséges:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig EXP(μ) időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;

Kimenő folyamat

Biz. (M/M/1 sorra, vázlat.)

Emlékeztető: a sorhossz stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Laplace-transzformáltak segítségével kiszámítjuk a távozási időközök eloszlását. Két eset lehetséges:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig EXP(μ) időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;
- $1-\rho$ valószínűséggel a sor üres, ekkor először meg kell várni egy érkezést (EXP(λ) idő), aztán annak a távozását (EXP(μ) idő) $\to$ a Laplace-transzformált $\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}$.

Ez alapján a D távozási időköz Laplace-transzformáltja

$$D^*(s)=\rho\frac{\mu}{\mu+s}+(1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}=$$
$$\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}+\frac{\mu-\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}=\frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző i-kre függetlenül);

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző i-kre függetlenül);
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző i-kre függetlenül);
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

A P ún. *irányítási mátrix* tulajdonságai:

- $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, m,$
- $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m$-re, és legalább egy i-re $<$ áll.

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző i-kre függetlenül);
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

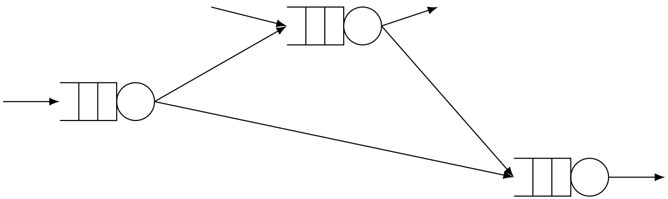
A P ún. *irányítási mátrix* tulajdonságai:

- $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, m$,
- $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m$-re, és legalább egy i-re $<$ áll.

Az ilyen tulajdonságú mátrixokat szubsztochasztikus mátrixoknak hívjuk.

Aciklikus Jackson-hálózatok

A nyílt Jackson-hálózatokon belül egy hálózat aciklikus, ha a szerverek sorba rendezhetőek úgy, hogy a szerverek között mindig csak előre felé van forgalom (vagyis nincs visszacsatolás).



Ilyenkor $i > j$-re $P_{ij} = 0$, azaz P felső-háromszög mátrix.

Aciklikus Jackson-hálózatok

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Aciklikus Jackson-hálózatok

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Aciklikus Jackson-hálózatok

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Mivel a hálózat aciklikus, ezért bármelyik szerver bemenetén független Poisson-folyamatok adódnak, így az unió tétel miatt a későbbi szerverek bemenete is Poisson-folyamat.

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_{ji}\lambda_j.$$

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az *i*-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_{ji}\lambda_j.$$

Ez a λ_i-kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_{ji} \lambda_j .$$

Ez a λ_i-kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Tétel.

A teljes rendszer pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Mi lehet a stacionárius eloszlás?

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_{ji} \lambda_j .$$

Ez a λ_i-kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Tétel.

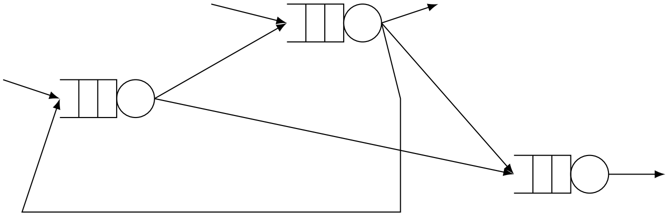
A teljes rendszer pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Mi lehet a stacionárius eloszlás? Jön mindjárt, de egyből általános nyílt hálózatokra, nemcsak aciklikusakra.

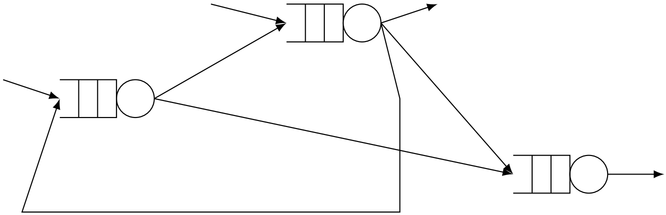
Forgalmi egyenlet

Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén találkozó folyamatok függetlensége sérülhet.



Forgalmi egyenlet

Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén találkozó folyamatok függetlensége sérülhet.



Emiatt a bemeneteken már nem feltétlenül lesznek Poisson-folyamatok. Ezzel együtt a hosszú távú átlagos érkezési rátáról van értelme beszélni, és azzal hasonlóan lehet számolni, mint a Poisson-folyamat paraméterével.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

A külső érkezéseket is figyelembe véve ez összefoglalható egy egyenletbe:

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{m} P_{ji} \lambda_j.$$

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

A külső érkezéseket is figyelembe véve ez összefoglalható egy egyenletbe:

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{m} P_{ji}\lambda_j.$$

Tétel. (Stabilitás feltétele)

Egy nyílt Jackson-hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Forgalmi egyenlet

Mátrix-vektor alakban a forgalmi egyenlet

$$\lambda(I - P) = \gamma;$$

Ha $I - P$ invertálható (ehhez elégséges, ha minden szerverből a forgalom egy része előbb-utóbb távozik a rendszerből), akkor a megoldás

$$\lambda = \gamma(I - P)^{-1}.$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I-P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i-edik szerverből indulva a j-edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} P_{ik} E(L_{k,j}),$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i-edik szerverből indulva a j-edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} P_{ik} E(L_{k,j}),$$

ami mátrix alakban írva

$$L = I + PL,$$

aminek a megoldása éppen

$$L = (I - P)^{-1}.$$

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \ldots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \ldots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \ldots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \ldots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \ldots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \ldots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Tétel. (Jackson)

Ha egy stabil nyílt Jackson-hálózatban az i-edik szerver terhelése $\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1$, *akkor a rendszer stacionárius eloszlása*

$$v_{st}(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{k_i} (1 - \rho_i).$$

Stacionárius eloszlás

Biz. (vázlat) Ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját.

Legyenek

- $K = (k_1, \dots, k_m)$,
- $K_{i+} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$;
- $K_{i\to j} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j + 1, \dots, k_m)$;
- $K_{i-} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$.

Stacionárius eloszlás

Biz. (vázlat) Ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját.

Legyenek

- $K = (k_1, \ldots, k_m)$,
- $K_{i+} = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_m)$;
- $K_{i \to j} = (k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_j + 1, \ldots, k_m)$;
- $K_{i-} = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_m)$.

Az egyes átmenetek jelentése:

- $K \to K_{i+}$: külső érkezés történt az i-edik szerverbe (ennek a rátája γ_i);
- $K \to K_{i \to j}$: kiszolgálás történt az i-edik szerverben és az igény továbbment a j-edik szerverbe (ennek a rátája $P_{ij}\mu_i$).
- $K \to K_{i-}$: kiszolgálás történt az i-edik szerverben és az igény távozott a rendszerből (ennek a rátája $(1 - \sum_j P_{ij})\mu_i$).

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji} \mu_j v_{\mathrm{st}}(K_{i \to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij} \right) v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\} \gamma_i v_{\mathrm{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) - v_{\mathrm{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij} \mu_i \right) \right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji} \mu_j v_{\mathrm{st}}(K_{i \to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij} \right) v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\} \gamma_i v_{\mathrm{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) - v_{\mathrm{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij} \mu_i \right) \right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

A fenti egyenletbe behelyettesítve $v_{\mathrm{st}}(K) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i}(1 - \rho_i)$-t, a szorzat alak miatt a legtöbb tényező kiemelhető minden tagból, és a visszamaradó tagok összege éppen a forgalmi egyenletet adja (0-ra rendezve).

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji} \mu_j \nu_{\text{st}}(K_{i \to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij} \right) \nu_{\text{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\} \gamma_i \nu_{\text{st}}(K_{i-}) + \mu_i \nu_{\text{st}}(K_{i+}) - \nu_{\text{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij} \mu_i \right) \right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

A fenti egyenletbe behelyettesítve $\nu_{\text{st}}(K) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i}(1 - \rho_i)$-t, a szorzat alak miatt a legtöbb tényező kiemelhető minden tagból, és a visszamaradó tagok összege éppen a forgalmi egyenletet adja (0-ra rendezve).

A Jackson-tétel szerint a rendszer stacionárius eloszlása úgymond *szorzat alakú*: egybeesik azzal, mintha a sorok független, ρ_i terhelésű M/M/1 sorok lennének.

Stacionárius eloszlás

Megjegyzések. Ha a hálózatban nemcsak M/M/1 szerverek vannak, hanem M/M/c vagy M/M/∞ szerverek is, attól még működik minden:

- a forgalmi egyenlet érvényes marad,
- a stabilitás feltétele is ugyanúgy az, hogy minden egyes sor stabil legyen,
- a hálózat stacionárius eloszlása is szorzat alakú, a megfelelő terhelésű sorok stacionárius eloszlásának szorzata.

Stacionárius eloszlás

Megjegyzések. Ha a hálózatban nemcsak M/M/1 szerverek vannak, hanem M/M/c vagy M/M/∞ szerverek is, attól még működik minden:

- a forgalmi egyenlet érvényes marad,
- a stabilitás feltétele is ugyanúgy az, hogy minden egyes sor stabil legyen,
- a hálózat stacionárius eloszlása is szorzat alakú, a megfelelő terhelésű sorok stacionárius eloszlásának szorzata.

A Jackson-tételből viszont nem következik, hogy az egyes sorok érkezési folyamata független. Ha a hálózatban van visszacsatolás, akkor az egyes sorok érkezési folyamata nem független. De a stacionárius eloszlás ilyenkor is szorzat alakú.

Átlagos rendszerben töltött idő

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Átlagos rendszerben töltött idő

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is.

Tétel. (Forgalmi tétel)

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Átlagos rendszerben töltött idő

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is.

Tétel. (Forgalmi tétel)

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Tétel. (Átlagos rendszerben töltött idő)

Ha egy igény beáll az i-edik sorba, akkor onnantól a rendszerből való távozásig szükséges idő várható értéke

$$\sum_{j=1}^{m} [(I-P)^{-1}]_{i,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}.$$

Biz. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik sorba hányszor állt be,

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába.

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába.

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Ilyenkor

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1,$$

az irányítási mátrix sztochasztikus.

Zárt Jackson-hálózatok

Zárt Jackson-hálózatokra stabilitást nem kell vizsgálni.

Zárt Jackson-hálózatok

Zárt Jackson-hálózatokra stabilitást nem kell vizsgálni.

A forgalmi egyenletben nincs külső érkezés:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ji} \lambda_j .$$

Ilyenkor a megoldás csak konstans szorzó erejéig egyértelmű; a normalizálás a rendszerben keringő igények számából jön majd. Jelölje a rendszerben lévő igények (fix) számát K.

Zárt Jackson-hálózatok

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i},$$

ahol λ_i-k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

$$\sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_m) : \\ k_1 + \cdots + k_m = K}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} = 1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_i-k már egyértelműen meghatározottak.)

Zárt Jackson-hálózatok

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i},$$

ahol λ_i-k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

$$\sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_m) : \\ k_1 + \cdots + k_m = K}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} = 1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_i-k már egyértelműen meghatározottak.)

Biz. Ugyanúgy csak ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás egyenleteit, mint nyílt hálózatokra.

Kitekintés: BCMP hálózatok

Meddig lehet a Jackson-hálózatokat általánosítani úgy, hogy a stacionárius eloszlás szorzat alakú maradjon? Ezek lesznek a BCMP hálózatok.

Kitekintés: BCMP hálózatok

Meddig lehet a Jackson-hálózatokat általánosítani úgy, hogy a stacionárius eloszlás szorzat alakú maradjon? Ezek lesznek a BCMP hálózatok.

Két fő szempontból általánosabbak a Jackson-hálózatoknál:

- Az igényeknek lehet többféle típusa. Az egyes szervereknél típustól függő kiszolgálási rátában részesülnek, és más P_{ij} valószínűségekkel mennek tovább a hálózatban.

Kitekintés: BCMP hálózatok

Meddig lehet a Jackson-hálózatokat általánosítani úgy, hogy a stacionárius eloszlás szorzat alakú maradjon? Ezek lesznek a BCMP hálózatok.

Két fő szempontból általánosabbak a Jackson-hálózatoknál:

- Az igényeknek lehet többféle típusa. Az egyes szervereknél típustól függő kiszolgálási rátában részesülnek, és más P_{ij} valószínűségekkel mennek tovább a hálózatban.
- A szervereknél a kiszolgálási idő exponenciális, és a következő kiszolgálási elvek lehetségesek:
  - FIFO (ez az M/M/1 sor),
  - PS (processor sharing),
  - IS (infinite server, ez lényegében az M/M/∞ sor),
  - és LIFO-resume, amikor a szerver egy igény kiszolgálását félbehagyja, majd ugyanonnan folytatja.