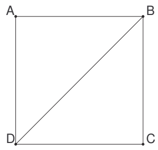
Teljesítményelemzés

1. feladatsor - diszkrét és folytonos idejű Markov-láncok

2024. ősz

1. Egy részeg körbe-körbe bolyong a faluban. A falu térképe a következő:



   Amikor a részeg megérkezik egy sarokra (A, B, C vagy D), találomra választja ki a következő irányt a lehetséges utcák közül, kivéve azt az irányt, amerről legutóbb jött.

   A részeg által meglátogatott utcasarkok sorozata Markov-láncot alkot-e? Ha nem, javasoljunk helyette egy Markov-láncot, ami leírja a bolyongást.

2. Egy 8×8-as sakktáblán egy huszár lépked véletlenszerűen úgy, hogy minden egyes lépésben a lehetséges lépések közül egyenletesen választ. Jelölje X_n a pozícióját az n. lépés után.

   (a) Gondoljuk meg, hogy X_n Markov-lánc. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?

   (b) Adjuk meg a stacionárius eloszlását.

   (c) Tegyük fel, hogy most az A1 mezőn áll a huszár. Mekkora a valószínűsége, hogy 99 lépés után ismét az A1 mezőn áll? És 100 lépés után?

3. Egy Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Rajzoljuk fel a Markov-lánc gráf-reprezentációját!

   (b) Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e a Markov-lánc?

   (c) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 3 lépés múlva?

   (d) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 101 lépés múlva?

   (e) Hosszú távon az idő mekkora részében van az 1-es állapotban?

4. Jónás kedvenc számítógépes játékában 3 pálya van. Ha az 1-es pályát sikerül teljesítenie, továbblép a 2-es pályára, de ha nem, akkor ismét az 1-est kell megpróbálnia. Ha a 2-es pályát teljesíti, továbblép a 3-as pályára, de ha nem, visszaugrik az 1-es pályára. A játékot akkor nyeri meg, ha a 3-as pályát is teljesíti. A 3-as pálya után mindenképpen az 1-es következik. Az 1-es pályát 3/4 eséllyel teljesíti (az előzményektől függetlenül), a 2-es pályát 2/3 eséllyel, a 3-as pályát 1/2 eséllyel. Jelölje X_n azt, hogy n pálya után éppen melyik pályán játszik.

   (a) Gondoljuk meg, hogy X_n Markov-lánc. Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?

   (b) Tegyük fel, hogy most az 1-es pálya következik. Mekkora a valószínűsége, hogy sikeresen teljesíti mindhárom pályát egyhuzamban?

   (c) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?

   (d) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?

   (e) Átlagosan a próbálkozások mekkora részét tölti az 1-es pályával hosszú távon?

   (f) Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pálya múlva éppen megnyeri a játékot?

   (g) Átlagosan hány pályát kell végigjátszania ahhoz, hogy egyszer megnyerje a játékot?

   (h) Az első pálya átlagosan 6 percig tart (sikerességtől függetlenül), a második 12 percig, a harmadik 18 percig. Mennyi időt tölt egy pályával átlagosan?

5. A Sóder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,4 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 2,7 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 60% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 50% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy A típusút fogadnak el.

   (a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?
   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon.
   (c) Átlagosan mennyi idő telik el két tétlen hónap között?
   (d) A cégvezetés azon gondolkodik, hogy érdemes-e preferálni inkább a B típusú munkát olyankor, amikor mindkettőre érkezik megrendelés. Segítsünk nekik a döntésben!

6. Ottó munkahelyén minden dolgozót az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kategória valamelyikébe sorolnak. Ottó minden hónap végén a korábbi hónapoktól függetlenül 1/2 valószínűséggel eggyel magasabb kategóriába kerül (az 5-ös kategóriában helyben marad), 1/3 valószínűséggel eggyel alacsonyabb kategóriába kerül (az 1-es kategóriában helyben marad) és 1/6 valószínűséggel ugyanabban a kategóriában marad.

   (a) Számoljuk ki a stacionárius eloszlást.
   (b) Az egyes kategóriákban fizetési bónuszt kapnak; a bónusz összege rendre 0, 10000, 20000, 30000, 40000 forint. Számítsuk ki, hosszú távon Ottó átlagosan mennyi bónuszt kap.

7. Géza bácsi minden reggel $\frac{2}{3}$ eséllyel megveszi az aznapi újságot és beteszi a többi közé. Vacsora előtt a felesége $\frac{1}{4}$ eséllyel az egész újságkupacot kidobja (akár hozott Géza bácsi újságot, akár nem). Ha összegyűlik 4 újság, azonnal kidobja őket. Egy este vacsora után meglátogatjuk Géza bácsiékat. Mi az ekkor az újságkupacban lévő újságok számának eloszlása? Mennyi az újságkupac átlagos mérete?

8. Jónás gépjármű-felelősségbiztosítója 4 kategóriába osztja az ügyfeleket: 1, 2, 3, 4. Ha egy ügyfél egy éven át nem okoz balesetet, egy kategóriával feljebb kerül (illetve ha a 4-esben volt, akkor ott marad). Ha egy ügyfél súlyos balesetet okoz, akkor a következő évben az 1-es kategóriába kerül. Ha egy ügyfél egy adott évben könnyű balesetet okoz, de súlyos balesetet nem, akkor a következő évben egy kategóriával lejjebb kerül (ha az 1-esben volt, akkor ott marad).

   Jónás egy év alatt 1/12 eséllyel okoz súlyos balesetet, és 1/4 annak az esélye, hogy okoz könnyű balesetet, de súlyosat nem.

   (a) Modellezzük a folyamatot Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy Jónás két év múlva a 2-es kategóriába tartozik, ha most a 4-es kategóriában van?
   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriába esik?
   (d) Hosszú távon az évfordulók mekkora része olyan típusú, hogy 3-as kategóriából 4-es kategóriába lép?
   (e) Az egyes kategóriák esetén az éves díj rendre 120000, 72000, 54000, 36000 forint. Mennyi a Jónás által fizetett éves díj hosszú távon átlagosan?

9. A Faláb FC az egyetemi focibajnokságban játszik. A bajnokságnak 3 osztálya van: A, B és C. A C osztályból 2/3 valószínűséggel feljutnak a B osztályba a következő szezonra, egyébként maradnak a C osztályban (az előzményektől függetlenül). A B osztályból 1/2 valószínűséggel feljutnak az A osztályba, 1/3 valószínűséggel maradnak a B osztályban és 1/6 valószínűséggel visszaesnek a C osztályba. Az A osztályban 1/10 valószínűséggel megnyerik a bajnokságot, 2/5 valószínűséggel nem nyernek, de maradnak az A osztályban, 1/2 valószínűséggel pedig kiesnek a B osztályba.

   (a) Modellezzük a Faláb FC szezononkénti szereplését Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?
   (b) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 szezonnal később a B osztályban vannak?
   (c) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 szezonnal később a B osztályban vannak?
   (f) Mekkora az esélye, hogy 10 szezon múlva a szezon végén kiesnek?
   (e) Átlagosan hány szezon telik el bajnoki cím között?

10. Egy gép Exp(0,1) ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás Exp(0,9) ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.
    (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.
    (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?
    (c) Amíg a gép működik, óránként 14000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 7000 forint. Mekkora átlagos „nettó” bevételt termel óránként a gép hosszú távon?
    (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixát.
11. Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgálnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez.
    (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.
    (b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.
    (c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?
    (d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?
    (e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?
    (f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?
    (g) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?
12. Egy ügyvédi irodában 3 ügyvéd dolgozik. Mindegyik ügyvéd egyszerre legfeljebb 1 ügyön dolgozik (és minden elvállalt ügyön csak 1 ügyvéd dolgozik). Az irodába átlagosan havonta 1 felkérés érkezik Poisson-folyamat szerint; csak akkor vállalnak el egy ügyet, ha éppen szabad valamelyik ügyvéd (ha több is szabad, akkor sorsolással döntik el, kié az ügy). Egy ügy átlagosan 3 hónapig tart.
    (a) Jelölje X_t a foglalt ügyvédek számát a t időpontban. Mit kell még feltenni a megadott információkon kívül, hogy X_t folytonos idejű Markov-lánc legyen? Adjuk meg az állapotokat és a generátort.
    (b) Most éppen mindhárom ügyvéd foglalt. Mekkora az esélye, hogy 3 nap múlva már csak két ügyvéd lesz foglalt (a 3 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).
    (c) Hosszú távon átlagosan hányan dolgoznak egyszerre?
13. Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan 2/3 hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.
    (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
    (b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?
    (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?
    (d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.
    (e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.
    (f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?
    (g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.
    (h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

14. $X(t)$ és $Y(t)$ párhuzamosan, egymástól függetlenül zajló folytonos idejű Markov-láncok. $X(t)$ állapottere $\{a, b, c\}$, $Y(t)$ állapottere $\{1, 2\}$; a generátoraik:

$$G_X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad G_Y = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Legyen $Z(t) = (X(t), Y(t))$. Gondoljuk meg, hogy $Z(t)$ is folytonos idejű Markov-lánc. Adjuk meg az állapotokat. Számítsuk ki a stacionárius eloszlást is. Mi a kapcsolat $Z(t)$ stacionárius eloszlása, valamint $X(t)$ és $Y(t)$ stacionárius eloszlása között?

15. Egy távközlési kábelen három független adatfolyam megy. Az adatfolyamok egyformák; egy adatfolyamnak két állapota van: ON állapotban 1 Mb/s a sebessége, OFF állapotban 0 Mb/s. ON állapotból μ rátával lép át OFF állapotba és OFF állapotból λ rátával lép át ON állapotba. Az adatfolyamok egymástól függetlenek. Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban mennyi a három adatfolyam együttes sebessége. Gondoljuk meg, hogy X_t-re teljesül a Markov-tulajdonság, majd írjuk fel a generátorát.

16. Egy betörő átlagosan havi 2 betörést követ el, kivéve, amikor börtönben van. Minden egyes betörésért 1/4 eséllyel kapják el. Ha elkapják, börtönbe küldik. A börtönből átlagosan 4 hónap után szabadul és újból nekilát a betöréseknek.

    (a) Modellezzük a betörő állapotát folytonos idejű Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
    (b) Feltéve, hogy most éppen szabadlábon van, mekkora a valószínűsége, hogy 10 nap múlva is szabadlábon lesz? (1 hónap tekinthető 30 napnak.)
    (c) Mennyi a valószínűsége, hogy jövőre ilyenkor szabadlábon lesz?
    (d) 10 év alatt az idő mekkora részét tölti börtönben?
    (e) Az okozott kár betörésenként átlagosan 100000 forint. Hosszú távon havonta átlagosan mekkora kárt okoz a betörő?

17. A Faláb FC focicsapatának 5 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 3 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

    Jelölje a sérült csatárok számát a t időpontban X_t.

    (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben „modell” a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?
    (b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!
    (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
    (d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?
    (e) Átlagosan hány csatárral játszanak?
    (f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 3 nap múlva is minden csatár egészséges (a 10 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).
    (g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

18. Egy sötét folyosót egyetlen lámpa világít meg, melyet a folyosóra belépéskor lehet felkapcsolni. Amikor valaki belép a folyosóra és a lámpa nem ég, felkapcsolja. A lámpa magától kapcsol ki pontosan 1 perc után; amíg világít, addig a kapcsoló újbóli megnyomása nem csinál semmit. Az emberek átlagosan 4 percenként érkeznek a folyosóra. Jelölje X_t a lámpa állapotát t-kor.

    (a) Mik a lehetséges állapotok? Teljesül-e X_t-re a Markov-tulajdonság?
    (b) Az idő mekkora részében világít a lámpa?
    (c) Egy éppen érkező ember mekkora eséllyel találja a lámpát felkapcsolva?
    (d) Tegyük fel, hogy egy embernek 20 másodpercig tart átkelni a folyosón. Feltéve, hogy felkapcsolva találta a lámpát, amikor belépett, mekkora az esélye, hogy végigér a folyosón égő lámpa mellett?