Teljesítményelemzés

2. feladatsor - Markov-sorok, Poisson pontfolyamat

2024. ősz

1. A strandon a főtt kukorica-árusnál sorbanállnak a vevők. Egy vevő kiszolgálása átlagosan 1 percig tart, a többiek addig várakoznak. Átlagosan 2 percenként érkezik egy vevő.
   (a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?
   (b) Milyen típusú a sor? Mekkora a terhelése?
   (c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a kukoricaárusnál (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?
   (d) A vevők mekkora részének kell 5 percnél többet várnia a kukoricára?
   (e) Feltéve, hogy egy vevő előtt 3-an vannak a sorban, mekkora a valószínűsége, hogy 5 percnél többet kell várnia a kiszolgálás végéig?

2. Tekintsük a következő rendszert: adott 3 sor (A, B és C), melyek közül az A sorban maximum 3 igény lehet, a B sorban 1, a C sorban 2 (beleértve az éppen kiszolgálás alatt álló igényeket is). A B sorban egy $\mu_B = 2$ rátájú FIFO szerver szolgálja ki az igényeket, a C sorban pedig egy $\mu_C = 3$ rátájú FIFO szerver. A rendszerbe bekerülő igények az A sor végére érkeznek $\lambda = 4$ rátával, ahonnan FIFO módon továbbmegy minden igény a B vagy C sorba attól függően, a B és C sor közül melyikben van szabad hely. Ha mindkét sorban van hely, akkor az igény a C sor felé megy tovább. Ha az A sor tele van, a további érkezések elvesznek.
   (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
   (b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.
   (c) Mekkora a csomagvesztés aránya tele sor miatt?
   (d) Mennyi az átlagos sorhossz az A, B, C sorokban és a teljes rendszerben?
   (e) Mennyi az effektív érkezési ráta az A, B, C sorokba és a teljes rendszerbe?
   (f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?
   (g) Átlagosan mennyi időt tölt el egy bekerülő igény az A, B, C sorokban illetve a teljes rendszerben?
   (h) Vizsgáljuk meg, ha pl. a B sorok kiszolgálási rátáját 0-ra módosítjuk.

3. Az ügyfelek sorbanállnak egy belvárosi ATM-nél. Az ATM-et egyszerre egy ügyfél használhatja, a többiek addig várakoznak. Minden ügyfél átlagosan 1 percig használja az ATM-et. Átlagosan 2 percenként érkezik egy ügyfél. Ha legalább 2-en állnak az ATM-nél (beleértve azt is, aki éppen használja), akkor a további érkezők egyből távoznak és nem jönnek vissza.
   (a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?
   (b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
   (c) Hosszú távon átlagosan az idő mekkora részében van az ATM használatban?
   (d) A várakozást és a használatot is figyelembe véve átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél az ATM-nél?
   (e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

4. Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgálnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez. Jelölje $X(t)$ a t időpontban a bankfiókban tartózkodó ügyfelek számát.
   (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Ez milyen típusú sor? Írjuk fel $X(t)$ generátorát.
   (b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.
   (c) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?
   (d) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?
   (e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 30 percet a bankfiókban?

5. Egy ügyvédi irodában 3 ügyvéd dolgozik. Mindegyik ügyvéd egyszerre legfeljebb 1 ügyön dolgozik (és minden elvállalt ügyön csak 1 ügyvéd dolgozik). Az irodába átlagosan havonta 1 felkérés érkezik Poisson-folyamat szerint; csak akkor vállalnak el egy ügyet, ha éppen szabad valamelyik ügyvéd (ha több is szabad, akkor sorsolással döntik el, kié az ügy). Egy ügy átlagosan 3 hónapig tart.
   (a) Jelölje X_t a foglalt ügyvédek számát a t időpontban. Mit kell még feltenni a megadott információkon kívül, hogy X_t folytonos idejű Markov-lánc legyen? Adjuk meg az állapotokat és a generátort. Ez milyen típusú sor?
   (b) Most éppen mindhárom ügyvéd foglalt. Mekkora az esélye, hogy 3 nap múlva már csak két ügyvéd lesz foglalt (a 3 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).
   (c) Hosszú távon átlagosan hányan dolgoznak egyszerre?
   (d) Az ügyek mekkora részét utasítják el amiatt, hogy egyik ügyvéd sem szabad? Mekkora ez alapján az effektív érkezési ráta?
6. Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...
   (a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?
   (b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?
   (c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?
   (d) Minden tizedik elhaladó autó piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?
   (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?
7. Egy irodában két ügyintéző, András és Bea fogadják a beérkező hívásokat. Átlagosan 5 percenként érkezik egy hívás; minden hívásnál feldobnak egy szabályos érmét, hogy eldöntsék, melyikük fogadja. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...
   (a) 10:00 és 10:20 között András pontosan 2 hívást fogad?
   (b) 10:00 és 10:20 között András fogadja az összes beérkező hívást?
   (c) 10:00 és 10:20 között András pontosan 2 hívást fogad, feltéve, hogy ez alatt az időszak alatt ő fogadja az összes beérkező hívást?
8. Ottó autójának két fényszórója van (bal és jobb). A bal fényszóró átlagosan kétévente egyszer romlik el, a jobb fényszóró viszont egy gyártási hiba miatt átlagosan 8 havonta romlik el.
   (a) Átlagosan milyen gyakran romlik el valamelyik fényszóró?
   (b) Mekkora az esélye, hogy a fényszórók végig hibátlanul üzemelnek a tél folyamán? (A tél 3 hónap.)
   (c) Mekkora az esélye, hogy a következő két fényszóró meghibásodás mindkettő a bal oldali fényszórón történik?
9. Panka mazsolás sütit süt; egy nagy tál tésztába 300 mazsolát rak, és aztán 100 kocka sütit süt belőle.
   (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kocka sütibe egyáltalán nem kerül mazsola?
   (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kocka sütibe nem került mazsola, feltéve, hogy a felét már megettük és abban nem volt mazsola?
10. Egy 200 oldalas kéziratban átlagosan 3 helyesírási huba van oldalanként. A korrektor minden egyes hibát 90% eséllyel vesz észre; a megtalált hibákat megjelöli.
    (a) Várhatóan hány hiba marad a kéziratban, miután kijavítják a korrektor által megtalált hibákat?
    (b) Mekkora az esélye, hogy a korrektor egy oldalon az összes hibát megtalálja?
    (c) Feltéve, hogy egy oldalon 3 hiba van, mekkora az esélye, hogy mindhárom az oldal alsó felén van?
11. Egy úton az elhaladó kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:
    $$r(x) = 6 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \qquad x \in [0, 24]$$
    (a) Ábrázoljuk a rátafüggvényt. Hol van maximuma?
    (b) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?
    (c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?
12. Egy szabályos hatoldalú kockával dobálunk, és összeadjuk a kapott számokat. Addig dobálunk, amíg átlépjük (vagy pont elérjük) az 1000-et. Legyen X az utolsó dobás értéke. Határozzuk meg X eloszlását.