1. gyakorlat: Diszkrét és folytonos idejű Markov-láncok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/09/12

5. feladat

A Sóder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,4 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 2,7 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 60% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 50% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy A típusút fogadnak el.

5. feladat

(a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?

(b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon.

(c) Átlagosan mennyi idő telik el két tétlen hónap között?

(d) A cégvezetés azon gondolkodik, hogy érdemes-e preferálni inkább a B típusú munkát olyankor, amikor mindkettőre érkezik megrendelés. Segítsünk nekik a döntésben!

5. feladat

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

5. feladat

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A, B, B, 0, B, B, A, 0, A, A, B, B, B, B, A, \ldots$$

5. feladat

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A,\ B,\ B,\ 0,\ B,\ B,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B,\ B,\ B,\ B,\ A, \ldots$$

Vajon ez egy Markov-lánc-e?

5. feladat

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A,\ B,\ B,\ 0,\ B,\ B,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B,\ B,\ B,\ B,\ A, \ldots$$

Vajon ez egy Markov-lánc-e?

Nem az. A gond az, hogy ha most egy B típusú munkán dolgoznak, akkor a jövő szempontjából számít, hogy az első vagy a második felét csinálják éppen: az első fele után mindenképpen a második fele jön, de a második fele után következhet egy A típusú munka, vagy egy B típusú munka, vagy egy tétlen hónap is.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A,. . .

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A, \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A,\ B1,\ B2,\ 0\}$ állapottéren.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A, \dots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A, B1, B2, 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A,\ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A, B1, B2, 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A, \dots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A,\ B1,\ B2,\ 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.
- B típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak B típusú ajánlatot *és* nem kapnak A típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.6 \cdot (1 - 0.5) = 0.3$.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A,...

Ez már Markov-lánc az {A, B1, B2, 0} állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.
- B típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak B típusú ajánlatot *és* nem kapnak A típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.6 \cdot (1 - 0.5) = 0.3$.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

5. feladat

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

5. feladat

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

A Markov-lánc bárhonnan bárhová eljuthat, azaz irreducibilis.

5. feladat

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

A Markov-lánc bárhonnan bárhová eljuthat, azaz irreducibilis.

Gyors ökölszabály a periodicitás eldöntésére: ha a P mátrixnak van legalább egy szigorúan pozitív eleme az átlóban, akkor a Markov-lánc mindenképpen aperiodikus.

Fordítva nem igaz.

5. feladat

(b) A $v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \,)$ stacionárius eloszlás kiszámítható a következőkből:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{st}} \cdot P &= v_{\mathrm{st}}\,, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,
\end{aligned}
$$

ahonnan

$$
\begin{aligned}
0.5x_1 + 0.5x_3 + 0.5x_4 &= x_1\,, \\
0.3x_1 + 0.3x_3 + 0.3x_4 &= x_2\,, \\
x_2 &= x_3\,, \\
0.2x_1 + 0.2x_3 + 0.2x_4 &= x_4\,, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

5. feladat

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

5. feladat

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{5}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{2}{13} \right).$$

5. feladat

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

A hosszú távú átlagos havi bevételüket az ergodtétel alapján számoljuk. Figyeljünk arra, hogy az ergodtételhez az egyes állapotokhoz kell értéket rendelnünk. Az A állapotra ez 1.4 (millió forint), a 0 állapotra 0, és a B1 és B2 állapot között szét kell osztanunk 2.7-et.

5. feladat

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{5}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{2}{13} \right).$$

A hosszú távú átlagos havi bevételüket az ergodtétel alapján számoljuk. Figyeljünk arra, hogy az ergodtételhez az egyes állapotokhoz kell értéket rendelnünk. Az A állapotra ez 1.4 (millió forint), a 0 állapotra 0, és a B1 és B2 állapot között szét kell osztanunk 2.7-et.
Ha egyenletesen osztjuk ketté, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 1.35 + \frac{3}{13} \cdot 1.35 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

5. feladat

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

5. feladat

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

Sőt, $x_2 = x_3$ miatt ugyanannyi marad, akárhogyan is osztjuk ketté.

5. feladat

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

Sőt, $x_2 = x_3$ miatt ugyanannyi marad, akárhogyan is osztjuk ketté.

(c) Mivel egy tétlen hónap stacionárius valószínűsége $x_4 = \frac{2}{13}$, ezért két tétlen hónap között eltelt idő átlagosan

$$\frac{1}{2/13} = 6.5$$

hónap.

5. feladat

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.

5. feladat

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

5. feladat

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

Ennek megfelelően

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

5. feladat

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

5. feladat

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{2}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{2}{16} \right),$$

5. feladat

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix},$$

és az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{2}{16} \cdot 1.4 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{2}{16} \cdot 0 \approx 1.19.$$

5. feladat

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{2}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{2}{16} \right),$$

és az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{2}{16} \cdot 1.4 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{2}{16} \cdot 0 \approx 1.19.$$

Ez egy picit magasabb, mint amikor az A típusú munkát preferálják, annak ellenére, hogy egy A típusú munkából az egy hónapra vetített bevétel magasabb. Ennek oka, hogy egy B típusú munka 2 hónapra garantál munkát, és így a tétlen hónapok aránya hosszú távon jelentősen alacsonyabb lesz.

8. feladat

Jónás gépjármű-felelősségbiztosítója 4 kategóriába osztja az ügyfeleket: 1, 2, 3, 4. Ha egy ügyfél egy éven át nem okoz balesetet, egy kategóriával feljebb kerül (illetve ha a 4-esben volt, akkor ott marad). Ha egy ügyfél súlyos balesetet okoz, akkor a következő évben az 1-es kategóriába kerül. Ha egy ügyfél egy adott évben könnyű balesetet okoz, de súlyos balesetet nem, akkor a következő évben egy kategóriával lejjebb kerül (ha az 1-esben volt, akkor ott marad).

Jónás egy év alatt $1/12$ eséllyel okoz súlyos balesetet, és $1/4$ annak az esélye, hogy okoz könnyű balesetet, de súlyosat nem.

8. feladat

(a) Modellezzük a folyamatot Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy Jónás két év múlva a 2-es kategóriába tartozik, ha most a 4-es kategóriában van?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriában van?

(d) Hosszú távon az évfordulók mekkora része olyan típusú, hogy 3-as kategóriából 4-es kategóriába lép?

(e) Az egyes kategóriák esetén az éves díj rendre 120000, 72000, 54000, 36000 forint. Mennyi a Jónás által fizetett éves díj hosszú távon átlagosan?

8. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

8. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 & 2/3 \\ 1/12 & 0 & 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus.

8. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 & 2/3 \\ 1/12 & 0 & 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus.

(b) Ha most a 4-es kategóriában van, akkor $v_0 = (\,0\;0\;0\;1\,)$ és

$$v_1 = v_0 P = \left(\frac{1}{12}\; 0\; \frac{1}{4}\; \frac{2}{3} \right) \qquad v_2 = v_1 P = \left(\frac{5}{48}\; \frac{17}{144}\; \frac{1}{6}\; \frac{11}{18} \right),$$

tehát annak a valószínűsége, hogy 2 év múlva a 2-es kategóriában lesz, $\frac{17}{144} \approx 0.118$.

8. feladat

(c) 10 év hosszú idő, tehát $v_{10} \approx v_{\mathrm{st}}$. $v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ kiszámítható

$$v_{\mathrm{st}} = v_{\mathrm{st}} P,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

alapján.

8. feladat

(c) 10 év hosszú idő, tehát $v_{10} \approx v_{\mathrm{st}}$. $v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ kiszámítható

$$v_{\mathrm{st}} = v_{\mathrm{st}} P,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

alapján. Az eredmény

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

tehát annak a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriában lesz, $\frac{1}{6}$.

8. feladat

(d) Hosszú távon annak a valószínűsége, hogy a 3-as kategóriában van egy adott évben, $x_3 = \frac{2}{9}$, és

$$\mathbb{P}(3 \to 4) = \mathbb{P}(3 \to 4|3)\mathbb{P}(3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}.$$

Ennyi a $3 \to 4$ átmenetek hosszú távú gyakorisága is az összes évhez képest.

8. feladat

(d) Hosszú távon annak a valószínűsége, hogy a 3-as kategóriában van egy adott évben, $x_3 = \frac{2}{9}$, és

$$\mathbb{P}(3 \to 4) = \mathbb{P}(3 \to 4|3)\mathbb{P}(3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}.$$

Ennyi a $3 \to 4$ átmenetek hosszú távú gyakorisága is az összes évhez képest.

(e) Az ergodtétel alapján Jónás hosszú távú díja átlagosan

$$120000 \cdot \frac{1}{6} + 72000 \cdot \frac{1}{6} + 54000 \cdot \frac{2}{9} + 36000 \cdot \frac{4}{9} = 60000$$

forint évente.

9. feladat

Egy gép $\mathrm{Exp}(0{,}1)$ ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás $\mathrm{Exp}(0,9)$ ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.

(b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?

(c) Amíg a gép működik, óránként 14000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 7000 forint. Mekkora átlagos „nettó” bevételt termel óránként a gép hosszú távon?

(d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixát.

9. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok: 1 - működik, 2 - javítás alatt áll. A lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $2 \to 1$, és mivel a várakozási idő mindig exponenciális eloszlású a múlttól függetlenül, ezért a Markov-tulajdonság teljesül, és ez egy Markov-lánc. Irreducibilis.

9. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok: 1 - működik, 2 - javítás alatt áll. A lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $2 \to 1$, és mivel a várakozási idő mindig exponenciális eloszlású a múlttól függetlenül, ezért a Markov-tulajdonság teljesül, és ez egy Markov-lánc. Irreducibilis.

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.9 & -0.9 \end{bmatrix}.$$

9. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok: 1 - működik, 2 - javítás alatt áll. A lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $2 \to 1$, és mivel a várakozási idő mindig exponenciális eloszlású a múlttól függetlenül, ezért a Markov-tulajdonság teljesül, és ez egy Markov-lánc. Irreducibilis.

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.9 & -0.9 \end{bmatrix}.$$

(b) Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \; x_2)$, ekkor

$$\begin{aligned} -0.1x_1 + 0.9x_2 &= 0, \\ 0.1x_1 - 0.9x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

aminek a megoldása

$$v_{\mathrm{st}} = (x_1 \; x_2) = \left(\frac{9}{10} \; \frac{1}{10} \right).$$

9. feladat

(b) Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{1}{10}$ részében van javítás alatt a gép.

9. feladat

(b) Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{1}{10}$ részében van javítás alatt a gép.

(c) Az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos nettó profit

$$\frac{9}{10} \cdot 14000 + \frac{1}{10} \cdot (-7000) = 11900$$

forint per óra.

9. feladat

(b) Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{1}{10}$ részében van javítás alatt a gép.

(c) Az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos nettó profit

$$\frac{9}{10} \cdot 14000 + \frac{1}{10} \cdot (-7000) = 11900$$

forint per óra.

(d) A beágyazott Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixa (nem túl izgalmas):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. feladat

Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan 2/3 hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

(b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

13. feladat

(d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

(e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

(f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?

(g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.

(h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

13. feladat

Megoldás.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

13. feladat

Megoldás.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

Megoldás. Az állapotok 0, A, B (0 az, hogy éppen nincs munkája). A lehetséges átmenetek $0 \to A, 0 \to B, A \to 0, B \to 0$. Feltéve, hogy a munkák között eltelő várakozási idő is exponenciális eloszlású és a munkák hossza is exponenciális eloszlású, ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

13. feladat

Megoldás.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

Megoldás. Az állapotok 0, A, B (0 az, hogy éppen nincs munkája). A lehetséges átmenetek $0 \to A, 0 \to B, A \to 0, B \to 0$. Feltéve, hogy a munkák között eltelő várakozási idő is exponenciális eloszlású és a munkák hossza is exponenciális eloszlású, ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

Az A típusú ajánlatok 3/2 rátával érkeznek, a B típusú ajánlatok rátája 1.

13. feladat

Megoldás.

(a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

Megoldás. Az állapotok 0, A, B (0 az, hogy éppen nincs munkája). A lehetséges átmenetek $0 \to A, 0 \to B, A \to 0, B \to 0$. Feltéve, hogy a munkák között eltelő várakozási idő is exponenciális eloszlású és a munkák hossza is exponenciális eloszlású, ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

Az A típusú ajánlatok 3/2 rátával érkeznek, a B típusú ajánlatok rátája 1.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

13. feladat

(b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

13. feladat

(b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

Megoldás. Jelölje T_A az első A típusú ajánlatig szükséges időt. Ekkor $T_A \sim \mathrm{EXP}(3/2)$, és

$$\mathbb{P}(T_A < 2/30) = 1 - e^{-2/30 \cdot 3/2} \approx 0.095.$$

13. feladat

(b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

Megoldás. Jelölje T_A az első A típusú ajánlatig szükséges időt. Ekkor $T_A \sim \mathrm{EXP}(3/2)$, és

$$\mathbb{P}(T_A < 2/30) = 1 - e^{-2/30 \cdot 3/2} \approx 0.095.$$

Jelölje T az első bármilyen típusú ajánlatig szükséges időt. Ekkor $T \sim \mathrm{EXP}(5/2)$, és

$$\mathbb{P}(T < 2/30) = 1 - e^{-2/30 \cdot 5/2} \approx 0.154.$$

13. feladat

(b) Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 2 nap múlva mekkora valószínűséggel dolgozik Tivadar éppen A típusú munkán, akkor a rövid távú közelítést használhatjuk; $v(0) = (1\ 0\ 0)$, és

$$v(2/30) = v(0)e^{Q \cdot 1/15} \approx v(0)(I + Q/15) =$$

$$(1\ 0\ 0) \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & 1/10 & 1/15 \\ 1/15 & 14/15 & 0 \\ 1/30 & 0 & 29/30 \end{bmatrix} = (5/6\ 1/10\ 1/15),$$

tehát a kérdéses valószínűség közelítőleg $1/10$.

13. feladat

(b) Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 2 nap múlva mekkora valószínűséggel dolgozik Tivadar éppen A típusú munkán, akkor a rövid távú közelítést használhatjuk; $v(0) = (1\ 0\ 0)$, és

$$v(2/30) = v(0)e^{Q\cdot 1/15} \approx v(0)(I + Q/15) =$$

$$(1\ 0\ 0) \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & 1/10 & 1/15 \\ 1/15 & 14/15 & 0 \\ 1/30 & 0 & 29/30 \end{bmatrix} = (5/6\ 1/10\ 1/15),$$

tehát a kérdéses valószínűség közelítőleg $1/10$. (Egyébként a valószínűség valójában ≈ 0.0892).

13. feladat

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

13. feladat

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

Megoldás. Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
-5/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 &= 0\\
3/2x_1 - x_2 &= 0\\
x_1 - 1/2x_3 &= 0,\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1.
\end{aligned}$$

13. feladat

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

Megoldás. Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} -5/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 &= 0 \\ 3/2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - 1/2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

A megoldása

$$v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

13. feladat

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

Megoldás. Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\; x_2\; x_3)$. Ekkor

$$\begin{aligned} -5/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 &= 0 \\ 3/2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - 1/2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

A megoldása

$$v_{\mathrm{st}} = (x_1\; x_2\; x_3) = \left(\frac{2}{9}\; \frac{3}{9}\; \frac{4}{9}\right).$$

Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{3}{9}$ részét tölti Tivadar A típusú munkával.

13. feladat

(d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

13. feladat

(d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

Az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0 \cdot x_1 + 20000 \cdot x_2 + 50000 \cdot x_3 = 0 \cdot \frac{2}{9} + 20000 \cdot \frac{3}{9} + 50000 \cdot \frac{4}{9} \approx 28900$$

forint per nap.

13. feladat

(d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

Az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0 \cdot x_1 + 20000 \cdot x_2 + 50000 \cdot x_3 = 0 \cdot \frac{2}{9} + 20000 \cdot \frac{3}{9} + 50000 \cdot \frac{4}{9} \approx 28900$$

forint per nap.

(e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

13. feladat

(d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

Az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0 \cdot x_1 + 20000 \cdot x_2 + 50000 \cdot x_3 = 0 \cdot \frac{2}{9} + 20000 \cdot \frac{3}{9} + 50000 \cdot \frac{4}{9} \approx 28900$$

forint per nap.

(e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

A beágyazott Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixához először leosztjuk Q i-edik sorát $|q_{ii}|$-vel minden i-re, majd hozzáadunk I-t:

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3/5 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 2/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. feladat

(f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?

13. feladat

(f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?

Megoldás. Legyen $u_{\mathrm{st}} = (y_1\ y_2\ y_3)$ a beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Ekkor

$$u_{\mathrm{st}} \cdot P = u_{\mathrm{st}}, \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

alapján

$$y_1 = y_2 + y_3, \quad \frac{3}{5}y_1 = y_2, \quad \frac{2}{5}y_1 = y_3, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$

aminek a megoldása

$$u_{\mathrm{st}} = (y_1\ y_2\ y_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}.$$

y_2 és y_3 jellemzi az A és B típusú munkákat, tehát az összes elvállalt munkán belül az A típusú munkák *darabszámának* aránya

$$\frac{3/10}{3/10 + 2/10} = \frac{3}{5}.$$

13. feladat

(g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.

13. feladat

(g) Megoldás. Ezúttal az állapotok 0, A, B1, B2, és

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

mivel egy B típusú munka mindkét felének a várható értéke 1 hónap, így az idejük EXP(1) eloszlású.

13. feladat

(g) Megoldás. Ezúttal az állapotok 0, A, B1, B2, és

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

mivel egy B típusú munka mindkét felének a várható értéke 1 hónap, így az idejük EXP(1) eloszlású.

A stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

míg az eredeti stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

13. feladat

(g) Megoldás. Ezúttal az állapotok 0, A, B1, B2, és

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

mivel egy B típusú munka mindkét felének a várható értéke 1 hónap, így az idejük EXP(1) eloszlású.

A stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix},$$

míg az eredeti stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Ugyanaz-e a két folyamat?

13. feladat

(g) Bár a két folyamat stacionárius eloszlása (és így a hosszú távú viselkedésük) konzisztens, a két folyamat különböző.

13. feladat

(g) Bár a két folyamat stacionárius eloszlása (és így a hosszú távú viselkedésük) konzisztens, a két folyamat különböző.

A B munkával eltöltött idő eloszlása eltérő a két esetben. Az eredeti folyamatra ez EXP(1/2), de a második folyamatra Gamma(2,1) (más néven Erlang(2,1)), aminek a várható értéke ugyanannyi (emiatt konzisztens a stacionárius eloszlás), de a szórása kisebb.

13. feladat

(g) Bár a két folyamat stacionárius eloszlása (és így a hosszú távú viselkedésük) konzisztens, a két folyamat különböző.

A B munkával eltöltött idő eloszlása eltérő a két esetben. Az eredeti folyamatra ez EXP(1/2), de a második folyamatra Gamma(2,1) (más néven Erlang(2,1)), aminek a várható értéke ugyanannyi (emiatt konzisztens a stacionárius eloszlás), de a szórása kisebb.

Lényegében azzal, hogy egy állapotot kicseréltünk egy 2 állapotú mini Markov-láncra, az ott töltött idő eloszlását módosítottuk exponenciális eloszlás helyett valami más eloszlásra.

13. feladat

(g) Bár a két folyamat stacionárius eloszlása (és így a hosszú távú viselkedésük) konzisztens, a két folyamat különböző.

A B munkával eltöltött idő eloszlása eltérő a két esetben. Az eredeti folyamatra ez EXP(1/2), de a második folyamatra Gamma(2,1) (más néven Erlang(2,1)), aminek a várható értéke ugyanannyi (emiatt konzisztens a stacionárius eloszlás), de a szórása kisebb.

Lényegében azzal, hogy egy állapotot kicseréltünk egy 2 állapotú mini Markov-láncra, az ott töltött idő eloszlását módosítottuk exponenciális eloszlás helyett valami más eloszlásra.

Kitekintés. Általában tetszőleges eloszlás közelíthető egy megfelelő (szükség esetén bonyolultabb) mini Markov-lánc segítségével. Erről szólnak a fázis-típusú eloszlások (phase-type distribution). Megnézzük még ebben a félévben.

13. feladat

(h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

13. feladat

(h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

Megoldás. Most csak 2 állapot van, 0 és B,

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$v_{\mathrm{st}} = (0.5\ 0.5),$$

és az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0.5 \cdot 50000 + 0.5 \cdot 0 = 25000\,(\text{forint per nap}).$$