2. gyakorlat: Markov-sorok, Poisson-pontfolyamat

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/09/26

1. feladat

A strandon a főtt kukorica-árusnál sorbanállnak a vevők. Egy vevő kiszolgálása átlagosan 1 percig tart, a többiek addig várakoznak. Átlagosan 2 percenként érkezik egy vevő.

(a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

(b) Milyen típusú a sor? Mekkora a terhelése?

(c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a kukoricaárusnál (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?

(d) Feltéve, hogy egy vevő előtt 3-an vannak a sorban, mekkora a valószínűsége, hogy 5 percnél többet kell várnia a kiszolgálás végéig? És ha nincs előtte senki?

(e) A vevők mekkora részének kell 5 percnél többet várnia a kukoricára?

1. feladat

(a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

1. feladat

(a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A sorhossz lehetséges állapotai: $0, 1, 2, \ldots$

1. feladat

(a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A sorhossz lehetséges állapotai: $0, 1, 2, \ldots$

(b) Milyen típusú a sor? Mekkora a terhelése?

1. feladat

(a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A sorhossz lehetséges állapotai: $0, 1, 2, \ldots$

(b) Milyen típusú a sor? Mekkora a terhelése?

Ez egy M/M/1 sor $\lambda = 1/2$ érkezési rátával és $\mu = 1$ kiszolgálási rátával. A sor terhelése

$$\rho = \lambda/\mu = 0.5.$$

1. feladat

(c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a kukoricaárusnál (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?

(c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a kukoricaárusnál (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?

Megoldás. Az M/M/1 sorra a sorhossz eloszlása PGEO$(1-\rho)$, az átlagos sorhossz

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 1,$$

az effektív érkezési ráta

$$\lambda_e = \lambda = 1/2,$$

és a sorban töltött idő várható értéke

$$W = L/\lambda_e = 2$$

(amiből egyébként átlagosan 1 időegységnyi a kiszolgálással töltött idő és 1 időegységnyi a várakozással töltött idő).

1. feladat

(d) Feltéve, hogy egy vevő előtt 3-an vannak a sorban, mekkora a valószínűsége, hogy 5 percnél többet kell várnia a kiszolgálás végéig? És ha nincs előtte senki?

1. feladat

(d) Feltéve, hogy egy vevő előtt 3-an vannak a sorban, mekkora a valószínűsége, hogy 5 percnél többet kell várnia a kiszolgálás végéig? És ha nincs előtte senki?

Megoldás. Egy M/M/1 sorban feltéve, hogy egy igény a sorban a k-adik helyre érkezik, a kiszolgálási idejének feltételes eloszlása Erlang(k, μ) (más néven Gamma(k, μ)). Így, ha

$$P(\text{5 percnél többet kell várni}|\text{3-an vannak előtte}) = 1 - F_{\text{Erlang}(4,1)}(5) \approx 0.265,$$

és

$$P(\text{5 percnél többet kell várni}|\text{nincsenek előtte}) = 1 - F_{\text{Erlang}(1,1)}(5) = 1 - F_{\text{Exp}(1)}(5) = 1 - (1 - e^{-5}) \approx 0.0067.$$

(e) A vevők mekkora részének kell 5 percnél többet várnia a kukoricára?

(e) A vevők mekkora részének kell 5 percnél többet várnia a kukoricára?

Megoldás. A kiszolgálási idő eloszlása M/M/1 sorra

$$\mathrm{EXP}((1-\rho)\mu) = \mathrm{EXP}(\mu - \lambda) = \mathrm{EXP}(0.5),$$

így

$$P(\text{egy vevőnek 5 percnél többet kell várni}) =$$
$$1 - F_{\mathrm{Exp}(0.5)}(5) = 1 - (1 - e^{0.5\cdot 5}) \approx 0.082,$$

azaz a vevők 8.2%-ának kell 5 percnél többet várnia.

2. feladat

Tekintsük a következő rendszert: adott 3 sor (A, B és C), melyek közül az A sorban maximum 3 igény lehet, a B sorban 1, a C sorban 2 (beleértve az éppen kiszolgálás alatt álló igényeket is). A B sorban egy $\mu_B = 2$ rátájú FIFO szerver szolgálja ki az igényeket, a C sorban pedig egy $\mu_C = 3$ rátájú FIFO szerver. A rendszerbe bekerülő igények az A sor végére érkeznek $\lambda = 4$ rátával, ahonnan FIFO módon továbbmegy minden igény a B vagy C sorba attól függően, a B és C sor közül melyikben van szabad hely. Ha mindkét sorban van hely, akkor az igény a C sor felé megy tovább. Ha az A sor tele van, a további érkezések elvesznek.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

(b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.

(c) Mekkora a csomagvesztés aránya tele sor miatt?

(d) Mennyi az átlagos sorhossz az A, B, C sorokban és a teljes rendszerben?

(e) Mennyi az effektív érkezési ráta az A, B, C sorokba és a teljes rendszerbe?

(f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?

(g) Átlagosan mennyi időt tölt el egy bekerülő igény az A, B, C sorokban illetve a teljes rendszerben?

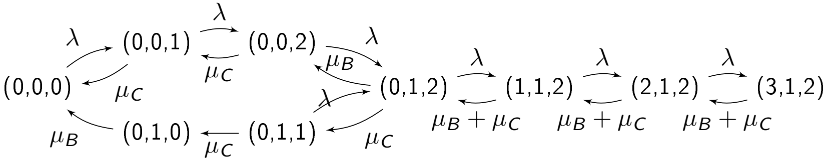
(h) Vizsgáljuk meg, ha pl. a B sorok kiszolgálási rátáját 0-ra módosítjuk.

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

Megoldás. Jelölje (a, b, c) azt az állapotot, ahol az A sorban a igény, a B sorban b igény, a C sorban C igény van. Figyelembe véve azt is, hogy az A sorban csak akkor lehet igény, ha a B és C sor tele van, a lehetséges állapotok és a gráfreprezentáció a következőek:



2. feladat

Ha az állapotok sorrendje

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2),$$

akkor a generátor:

$$\begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_C & -(\lambda+\mu_C) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_C & -(\lambda+\mu_C) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
\mu_B & 0 & 0 & -(\lambda+\mu_B) & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_B & 0 & \mu_C & -(\lambda+\mu_B+\mu_C) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu_B & 0 & \mu_C & -(\lambda+\mu_B+\mu_C) & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_B+\mu_C & -(\lambda+\mu_B+\mu_C) & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_B+\mu_C & -(\lambda+\mu_B+\mu_C) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_B+\mu_C & -(\mu_B+\mu_C)
\end{bmatrix}$$

(A jobb alsó 4×4-es tömb ismétlődő szerkezetű – ezt úgy hívjuk, hogy a reguláris része a generátornak.)

2. feladat

(b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.

(b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.
Megoldás. Ha $v_{st} = (x_1\ x_2\ \ldots x_9)$, akkor a

$$v_{st}\,G = 0, \qquad x_1 + \cdots + x_9 = 1$$

egyenletrendszerből

$$v_{st} = (.131\ .152\ .133\ .035\ .070\ .162\ .130\ .104\ .083)$$

2. feladat

(b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.
Megoldás. Ha $v_{\text{st}} = (x_1\ x_2\ \dots x_9)$, akkor a

$$v_{\text{st}} G = 0, \qquad x_1 + \cdots + x_9 = 1$$

egyenletrendszerből

$$v_{\text{st}} = (.131\ .152\ .133\ .035\ .070\ .162\ .130\ .104\ .083)$$

(c) Mekkora a csomagvesztés aránya tele sor miatt?

(b) Határozzuk meg a rendszer stacionárius eloszlását.
Megoldás. Ha $v_{st} = (x_1\ x_2\ \dots x_9)$, akkor a

$$v_{st}G = 0, \qquad x_1 + \dots + x_9 = 1$$

egyenletrendszerből

$$v_{st} = (.131\ .152\ .133\ .035\ .070\ .162\ .130\ .104\ .083)$$

(c) Mekkora a csomagvesztés aránya tele sor miatt?

$$x_9 = 0.083.$$

2. feladat

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2)$$

(d) Mennyi az átlagos sorhossz az A, B, C sorokban és a teljes rendszerben?

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2)$$

(d) Mennyi az átlagos sorhossz az A, B, C sorokban és a teljes rendszerben?
Megoldás.

$$L_A = 1 \cdot x_7 + 2 \cdot x_8 + 3 \cdot x_9) \approx 0.587,$$
$$L_A = 1 \cdot (x_2 + x_5) + 2(x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) \approx 0.583,$$
$$L_C = 1 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) \approx 1.446,$$
$$L = L_A + L_B + L_C \approx 2.616.$$

2. feladat

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2)$$

(e) Mennyi az effektív érkezési ráta az A, B, C sorokba és a teljes rendszerbe?

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2)$$

(e) Mennyi az effektív érkezési ráta az A, B, C sorokba és a teljes rendszerbe? A teljes rendszerbe és az A sorba egyaránt

$$\lambda_e = \lambda_A = \lambda(1 - x_9) \approx 3.668.$$

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(1,1,2),(2,1,2),(3,1,2)$$

(e) Mennyi az effektív érkezési ráta az A, B, C sorokba és a teljes rendszerbe? A teljes rendszerbe és az A sorba egyaránt

$$\lambda_e = \lambda_A = \lambda(1 - x_9) \approx 3.668.$$

A B és a C soroknál viszont figyelembe kell venni azt, hogy ha kiszolgálás történik, és az A sor nem üres, akkor az A sorból történik egy instant érkezés. Ez alapján

$$\lambda_B = \lambda x_3 + \mu_B(x_7 + x_8 + x_9) \approx 1.166,$$
$$\lambda_C = \lambda(x_1 + x_2 + x_4 + x_5) + \mu_C(x_7 + x_8 + x_9) \approx 2.501.$$

2. feladat

(f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?

2. feladat

(f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?
Megoldás.

$$\lambda_C/\lambda_e \approx 0.682.$$

(f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?
Megoldás.

$$\lambda_C/\lambda_e \approx 0.682.$$

(g) Átlagosan mennyi időt tölt el egy bekerülő igény az A, B, C sorokban illetve a teljes rendszerben?

(f) A rendszerbe kerülő igények mekkora része kerül a C sorba?
Megoldás.

$$\lambda_C/\lambda_e \approx 0.682.$$

(g) Átlagosan mennyi időt tölt el egy bekerülő igény az A, B, C sorokban illetve a teljes rendszerben?

$$\begin{aligned} L_A/\lambda_A &\approx 0.160 \\ L_B/\lambda_B &= 0.5 \\ L_C/\lambda_C &\approx 0.578 \\ L/\lambda_e &\approx 0.713 \end{aligned}$$

(A B sor maximális hossza 1, így ott az igények soha nem várakoznak kiszolgálás nélkül, hanem 2 rátájú kiszolgálást kapnak.)

3. feladat

Az ügyfelek sorbanállnak egy belvárosi ATM-nél. Az ATM-et egyszerre egy ügyfél használhatja, a többiek addig várakoznak. Minden ügyfél átlagosan 1 percig használja az ATM-et. Átlagosan 2 percenként érkezik egy ügyfél. Ha legalább 2-en állnak az ATM-nél (beleértve azt is, aki éppen használja), akkor a további érkezők egyből távoznak és nem jönnek vissza.

(a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(c) Hosszú távon átlagosan az idő mekkora részében van az ATM használatban?

(d) A várakozást és a használatot is figyelembe véve átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél az ATM-nél?

(e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

3. feladat

(a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok?

(a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok? Megoldás.

Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A rendszer lehetséges állapotai: $0, 1, 2$.

3. feladat

(a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok? Megoldás.

Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A rendszer lehetséges állapotai: $0, 1, 2$.

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

3. feladat

(a) Modellezzük az ATM-nél állók számát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok? Megoldás.

Ahhoz, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön, azt kell feltennünk, hogy az érkezési folyamat Poisson-folyamat, és a kiszolgálási idők függetlenek és exponenciális eloszlásúak. A rendszer lehetséges állapotai: $0, 1, 2$.

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

Ez egy M/M/1/2 sor $\lambda = 1/2$ érkezési rátával és $\mu = 1$ kiszolgálási rátával. A sor terhelése $\rho = \lambda/\mu = 0.5$. A generátor

$$G = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. feladat

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

3. feladat

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

A $v_{\text{st}} = (x_0\, x_1\, x_2)$ stacionárius eloszlást kiszámíthatjuk a

$$v_{\text{st}} G = 0, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1$$

egyenletrendszerből,

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

A $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, x_2)$ stacionárius eloszlást kiszámíthatjuk a

$$v_{\mathrm{st}} G = 0, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1$$

egyenletrendszerből, VAGY a

$$\lambda x_i = \mu x_{i+1} \qquad (i = 0, 1)$$

dinamikus egyensúly egyenletek alapján,

3. feladat

(b) Ez milyen típusú sor? Írjuk fel a generátort és számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

A $v_{\text{st}} = (x_0\; x_1\; x_2)$ stacionárius eloszlást kiszámíthatjuk a

$$v_{\text{st}}G = 0, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1$$

egyenletrendszerből, VAGY a

$$\lambda x_i = \mu x_{i+1} \qquad (i = 0, 1)$$

dinamikus egyensúly egyenletek alapján, VAGY órai tétel alapján eleve tudjuk, hogy TPGEO$(0.5, 2)$ csonkolt pesszimista geometriai eloszlású, mindenesetre

$$v_{\text{st}} = \left(\frac{4}{7}\;\frac{2}{7}\;\frac{1}{7}\right).$$

3. feladat

(c) Hosszú távon átlagosan az idő mekkora részében van az ATM használatban?

3. feladat

(c) Hosszú távon átlagosan az idő mekkora részében van az ATM használatban?

Megoldás. $x_1 + x_2 = 3/7$.

(d) A várakozást és a használatot is figyelembe véve átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél az ATM-nél?

(c) Hosszú távon átlagosan az idő mekkora részében van az ATM használatban?

Megoldás. $x_1 + x_2 = 3/7$.

(d) A várakozást és a használatot is figyelembe véve átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél az ATM-nél?

Megoldás. Little-formulát használunk. Az átlagos sorhossz

$$L = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 4/7,$$

az effektív érkezési ráta pedig

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_2) = 1/2 \cdot 6/7 = 3/7,$$

így az átlagos rendszerben töltött idő

$$W = L/\lambda_e 4/3.$$

3. feladat

(e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

(e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

Megoldás. Feltéve, hogy egy ügyfél k-adik helyre érkezik a sorban, a kiszolgálási ideje Erlang(k, μ).

3. feladat

(e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

Megoldás. Feltéve, hogy egy ügyfél k-adik helyre érkezik a sorban, a kiszolgálási ideje Erlang(k, μ).

A sorba beálló ügyfelek $\lambda x_0 / \lambda_e$ része áll be 0 hosszú sorba (tehát első helyre a sorban), $\lambda x_1 / \lambda_e$ része pedig 1 hosszú sorba, így egy ügyfél kiszolgálási idejének eloszlásfüggvénye

$$F(t) = \frac{\lambda x_0}{\lambda_e} F_{\mathrm{Erlang}(1,\mu)}(t) + \frac{\lambda x_1}{\lambda_e} F_{\mathrm{Erlang}(2,\mu)}(t) =$$
$$\frac{2}{3}(1 - e^{-t}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-t} - te^{-}t),$$

(e) Az ügyfelek mekkora része tölt több, mint 5 percet az ATM-nél?

Megoldás. Feltéve, hogy egy ügyfél k-adik helyre érkezik a sorban, a kiszolgálási ideje Erlang(k, μ).

A sorba beálló ügyfelek $\lambda x_0/\lambda_e$ része áll be 0 hosszú sorba (tehát első helyre a sorban), $\lambda x_1/\lambda_e$ része pedig 1 hosszú sorba, így egy ügyfél kiszolgálási idejének eloszlásfüggvénye

$$F(t) = \frac{\lambda x_0}{\lambda_e} F_{\mathrm{Erlang}(1,\mu)}(t) + \frac{\lambda x_1}{\lambda_e} F_{\mathrm{Erlang}(2,\mu)}(t) =$$
$$\frac{2}{3}(1 - e^{-t}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-t} - te^{-}t),$$

és

$$P(5 \text{ percnél többet kell várni}) = 1 - F(5) \approx 0.0180$$

6. feladat

Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...

(a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?

(b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?

(c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?

(d) Minden tizedik elhaladó autó piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?

(e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?

6. feladat

(a) P(5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem)=?

6. feladat

(a) P(5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem)=?

Megoldás. Az 5 perc alatt elhaladó autók száma $X \sim \mathrm{POI}(5 \cdot 1/2 = 2.5)$ eloszlású, és

$$P(X = 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} \approx 0.082.$$

6. feladat

(a) P(5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem)=?

Megoldás. Az 5 perc alatt elhaladó autók száma
$X \sim \mathrm{POI}(5 \cdot 1/2 = 2.5)$ eloszlású, és

$$P(X = 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} \approx 0.082.$$

(b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?

6. feladat

(a) P(5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem)=?

Megoldás. Az 5 perc alatt elhaladó autók száma $X \sim \mathrm{POI}(5 \cdot 1/2 = 2.5)$ eloszlású, és

$$P(X=0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} \approx 0.082.$$

(b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?

Megoldás. A 4 perc alatt elhaladó autók száma $Y \sim \mathrm{POI}(4 \cdot 1/2 = 2)$ eloszlású, és

$$P(Y \leq 3) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} + \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.857.$$

6. feladat

(c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?

6. feladat

(c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?

Megoldás. Diszjunkt intervallumokban elhaladó autók száma független, így

$$P(\text{2 percen át 0 autó, majd a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$P(\text{2 percen át 0 autó})P(\text{a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$\frac{1^0}{0!}e^{-1} \cdot \frac{1^3}{3!}e^{-1} \approx 0.0226.$$

(c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?

Megoldás. Diszjunkt intervallumokban elhaladó autók száma független, így

$$P(\text{2 percen át 0 autó, majd a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$P(\text{2 percen át 0 autó})P(\text{a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$\frac{1^0}{0!}e^{-1} \cdot \frac{1^3}{3!}e^{-1} \approx 0.0226.$$

(d) Minden tizedik elhaladó autó piros. P(5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó)=?

6. feladat

(c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?

Megoldás. Diszjunkt intervallumokban elhaladó autók száma független, így

$$P(\text{2 percen át 0 autó, majd a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$P(\text{2 percen át 0 autó})P(\text{a következő 2 percben 3 autó}) =$$
$$\frac{1^0}{0!}e^{-1} \cdot \frac{1^3}{3!}e^{-1} \approx 0.0226.$$

(d) Minden tizedik elhaladó autó piros. P(5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó)=?

A piros autók rátája $1/10 \cdot 1/2 = 1/20$, 5 perc alatt a piros autók száma $X \sim \mathrm{POI}(1/20 \cdot 5 = 0.25)$, és

$$P(X = 0) = \frac{0.25^0}{0!}e^{-0.25} \approx 0.779.$$

6. feladat

(e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?

6. feladat

(e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?

Megoldás. A piros és más színű autók is függetlenek, a más színű autók rátája $9/10 \cdot 1/2$, és így

$$\mathbb{P}(\text{3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó}) =$$
$$\mathbb{P}(\text{3 perc alatt 1 piros})P(\text{3 perc alatt 2 más színű autó}) =$$
$$\frac{(3/20)^1}{1!}e^{-3/20} \cdot \frac{(27/20)^2}{2!}e^{-27/20} \approx 0.0305.$$

Egy úton az elhaladó kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:

$$r(x) = 6 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \qquad x \in [0, 24]$$

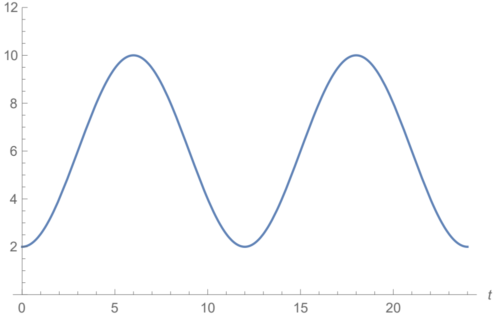
(a) Ábrázoljuk a rátafüggvényt. Hol van maximuma?

(b) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?

(c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?

Megoldás.

(a) Ez egy inhomogén Poisson folyamat. A ráta függvény 2 és 10 között változik, maximuma $t = 6$-nál és $t = 18$-nál van.



(b) Az egy nap alatt elhaladó összes kamionok száma

$$X \sim \mathrm{POI}\left(\int_0^{24} \lambda(t)\mathrm{d}t = 144\right),$$

aminek a várható értéke 144.

(b) Az egy nap alatt elhaladó összes kamionok száma

$$X \sim \text{POI}\left(\int_0^{24} \lambda(t)\mathrm{d}t = 144\right),$$

aminek a várható értéke 144.

(b) A 12:00 és 13:00 között elhaladó kamionok száma

$$Y \sim \text{POI}\left(\int_{12}^{13} \lambda(t)\mathrm{d}t = 4 - \frac{3}{\pi} \approx 3.045\right),$$

és

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{\left(4 - \frac{3}{\pi}\right)^3}{3!} e^{4-\frac{3}{\pi}} \approx 0.224.$$