4. gyakorlat: Jackson-hálózatok

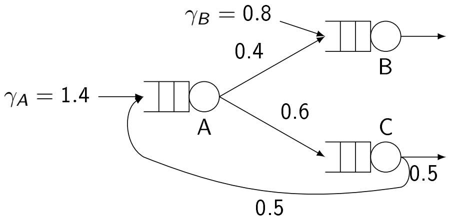
Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Mészáros András

2024/10/24

1. feladat

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2.5, \mu_B = 1.7, \mu_C = 1.5$.



(a) Stabil-e a hálózat?

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

(d) Mi a rendszer stacionárius eloszlása?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$\gamma = (\gamma_A \ \gamma_B \ \gamma_C) = (1.4 \ 0.8 \ 0), \quad \lambda = (\lambda_A \ \lambda_B \ \lambda_C).$$

Az egyes szerverek érkezési rátáját a forgalmi egyenletből tudjuk kiszámítani:

$$\lambda(I - P) = \gamma.$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0 \; 1.6 \; 1.2),$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0\ 1.6\ 1.2),$$

így

$$\begin{aligned}\lambda_A &= 2.0 < \mu_A = 2.5,\\ \lambda_B &= 1.6 < \mu_B = 1.7,\\ \lambda_C &= 1.2 < \mu_C = 1.5\end{aligned}$$

mind teljesül, a rendszer stabil.

1. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

1. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A/\mu_A = 0.800,$$
$$\rho_B = \lambda_B/\mu_B = 0.941,$$
$$\rho_C = \lambda_C/\mu_C = 0.800.$$

1. feladat

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

1. feladat

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

1. feladat

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

(d) A rendszer stacionárius eloszlása

1. feladat

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

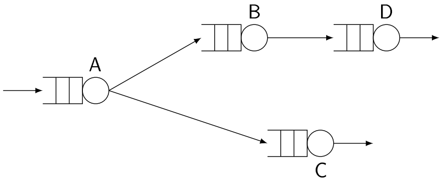
$$\sum_{j=1}^{m} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

(d) A rendszer stacionárius eloszlása

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{st}}(k_A, k_B, k_C) &= (1-\rho_A)\rho_A^{k_A}(1-\rho_B)\rho_B^{k_B}(1-\rho_C)\rho_C^{k_C} = \\ &= 0.00235 \cdot 0.8^{k_A+k_C} \cdot 0.941^{k_B}. \end{aligned}$$

2. feladat

Az alábbi hálózatban minden szerver M/M/1 típusú, az egyes szerverek kiszolgálási rátája rendre $\mu_A = 6.0, \mu_B = 2.0,$ $\mu_C = 4.0, \mu_D = 3.0$. A kívülről történő érkezések rátája $\gamma_A = 2.5$. Az A szerverből kimenő igények p valószínűséggel a B, $1 - p$ valószínűséggel a C szerver sorába állnak be.



(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

(d) A p paraméter mely értékére lesz az átlagos rendszerben töltött idő minimális?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgalmi egyenlet megoldható expliciten:

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \gamma_A = 2.5, \\ \lambda_B &= p\lambda_A = 2.5p, \\ \lambda_C &= (1-p)\lambda_A = 2.5(1-p), \\ \lambda_D &= \lambda_C = 2.5(1-p). \end{aligned}$$

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\begin{aligned} \lambda_A = 2.5 &< \mu_A = 6.0, \\ \lambda_B = 2.5p &< \mu_B = 2.0, \\ \lambda_C = 2.5(1-p) &< \mu_C = 4.0, \\ \lambda_D = 2.5p &< \mu_D = 3.0 \end{aligned}$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesüljön.

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\begin{aligned} \lambda_A = 2.5 &< \mu_A = 6.0, \\ \lambda_B = 2.5p &< \mu_B = 2.0, \\ \lambda_C = 2.5(1-p) &< \mu_C = 4.0, \\ \lambda_D = 2.5p &< \mu_D = 3.0 \end{aligned}$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesüljön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\begin{aligned} \lambda_A = 2.5 &< \mu_A = 6.0, \\ \lambda_B = 2.5p &< \mu_B = 2.0, \\ \lambda_C = 2.5(1-p) &< \mu_C = 4.0, \\ \lambda_D = 2.5p &< \mu_D = 3.0 \end{aligned}$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesüljön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

Megoldás. Aciklikus hálózatban ha a külső érkezési folyamatok független Poisson-pontfolyamatok, akkor az egyes szerverek érkezési folyamata is Poisson-folyamat, így a D szerver érkezési folyamata PPP(2.5).

2. feladat

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

2. feladat

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{4} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$

$$0.2857 + \frac{1-p}{4-2.5(1-p)} + \frac{p}{2-2.5p} + \frac{p}{3-2.5p}.$$

2. feladat

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és

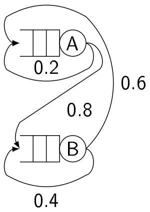
$$\sum_{j=1}^{4} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$

$$0.2857 + \frac{1-p}{4-2.5(1-p)} + \frac{p}{2-2.5p} + \frac{p}{3-2.5p}.$$

(d) Az előbbi függvény a $p \in [0, 0.8)$ intervallumon a minimumát $p = 0.141$-nél veszi fel.

3. feladat

Az alábbi zárt hálózatban két igény kering. Az A szerver M/M/1, kiszolgálási rátája $\mu_A = 1.0$, a B szerver szintén M/M/1 típusú, $\mu_B = 2.0$.



(a) Mik a lehetséges állapotok?

(b) Írjuk fel a teljes rendszer generátorát, és az alapján számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a Gordon-Newell tétel alapján.

(d) Adjuk meg az egyes szerverek terheltségét.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A (20)→(11) átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény valamelyikét (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8).

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A (20)$\to$(11) átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény valamelyikét (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8). Hasonlóan a többi átmenetráta:

- (20)$\to$(11) rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- (11)$\to$(20) rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$;
- (11)$\to$(02) rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- (20)$\to$(11) rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$.

3. feladat

(b) A teljes rendszer mint Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 & 0 \\ 1.2 & -2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

az ehhez tartozó stacionárius eloszlás pedig

$$v_{\mathrm{st}} = (0.4737\ 0.3158\ 0.2105).$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\begin{aligned} \lambda_A &= 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B \\ \lambda_B &= 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B, \end{aligned}$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$
$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

ahonnan

$$\lambda_A = 3c, \quad \lambda_B = 4c$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

3. feladat

(c) A Gordon–Newell tétel szerint c értékét onnan kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m):\\ k_1+\cdots+k_m=K}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} = 1,$$

ami itt

$$\left(\frac{3c}{1.0}\right)^2 + \left(\frac{3c}{1.0}\right)\left(\frac{4c}{2.0}\right) + \left(\frac{4c}{2.0}\right)^2 = 1,$$

ahonnan $c = 0.2294$, és így

$$\lambda_A = 3c = 0.6882, \quad \lambda_B = 4c = 0.9177.$$

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\text{st}}(2,0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737,$$
$$v_{\text{st}}(1,1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158,$$
$$v_{\text{st}}(0,2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\mathrm{st}}(2,0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737,$$
$$v_{\mathrm{st}}(1,1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158,$$
$$v_{\mathrm{st}}(0,2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$
\begin{aligned}
v_{\mathsf{st}}(2,0) &= \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737, \\
v_{\mathsf{st}}(1,1) &= \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158, \\
v_{\mathsf{st}}(0,2) &= \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,
\end{aligned}
$$

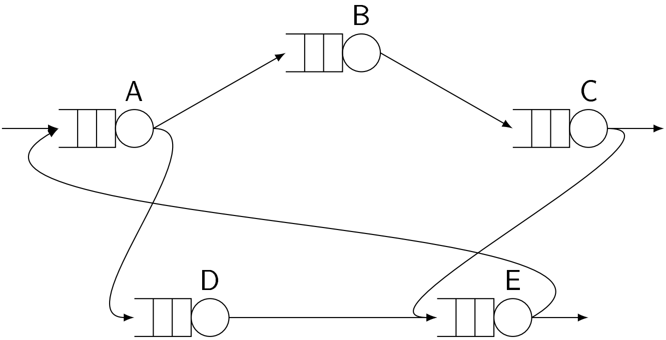
ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

$$
\begin{aligned}
\rho_A &= \lambda_A/\mu_A = 0.6882/1.0 = 0.6882, \\
\rho_B &= \lambda_B/\mu_B = 0.4588/1.0 = 0.4588.
\end{aligned}
$$

4. feladat

Az alábbi hálózatban az A szerver M/M/1 típusú, kiszolgálási rátája $\mu_A = 4$; a B és C szerverek szintén M/M/1 típusúak, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_B = 3, \mu_C = 4$; a D és E szerverek $M/M/\infty$ típusúak, egy szál kiszolgálási rátája $\mu_D = \mu_E = 1$. A kívülről történő érkezési ráta $\gamma_A = 3$.



4. feladat

Az A szerverből egy kiszolgált igény 0.6 valószínűséggel a B, 0.4 valószínűséggel a D felé továbbítódik. A C szerverből egy kiszolgált igény 0.8 valószínűséggel az E szerver felé továbbítódik, 0.2 valószínűséggel elhagyja a rendszert. Az E szerverből egy igény 0.3 valószínűséggel az A szerver felé továbbítódik, 0.7 valószínűséggel pedig elhagyja a rendszert.

(a) Stabil-e a hálózat?

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

(c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

4. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

4. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. Az irányítási mátrix

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan a forgalmi egyenlet megoldása

4. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. Az irányítási mátrix

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan a forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = \gamma(I-P)^{-1} = (2\ 0\ 0\ 0\ 0)(I-P)^{-1} = (2.717\ 1.630\ 1.630\ 1.087\ 2.391).$$

4. feladat

(a) Mivel

$$\lambda_A = 2.7171 < \mu_A = 4,$$
$$\lambda_B = 1.630 < \mu_B = 3,$$
$$\lambda_C = 1.630 < \mu_C = 4$$

mind teljesül, ezért a rendszer stabil (a D és E szerverek M/M/∞ típusúak, ezért azok mindig stabilak).

4. feladat

(a) Mivel

$$\lambda_A = 2.7171 < \mu_A = 4,$$
$$\lambda_B = 1.630 < \mu_B = 3,$$
$$\lambda_C = 1.630 < \mu_C = 4$$

mind teljesül, ezért a rendszer stabil (a D és E szerverek M/M/∞ típusúak, ezért azok mindig stabilak).

(b) Az egyes szerverek terhelése

4. feladat

(a) Mivel

$$\lambda_A = 2.7171 < \mu_A = 4,$$
$$\lambda_B = 1.630 < \mu_B = 3,$$
$$\lambda_C = 1.630 < \mu_C = 4$$

mind teljesül, ezért a rendszer stabil (a D és E szerverek $M/M/\infty$ típusúak, ezért azok mindig stabilak).

(b) Az egyes szerverek terhelése

$$\rho_A = \lambda_A/\mu_A = 0.679,$$
$$\rho_B = \lambda_B/\mu_B = 0.543,$$
$$\rho_C = \lambda_C/\mu_C = 0.408.$$

(A D és E szerverek kiszolgáló kapacitása végtelen, ezért ott nincs értelme a terhelésnek.)

4. feladat

(c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

4. feladat

(c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

Megoldás. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik szerverben átlagosan hányszor jár az igény (ezt az $(I - P)^{-1}$ mátrix adja meg), valamint hogy ott átlagosan mennyi időt tölt:

4. feladat

(c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

Megoldás. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik szerverben átlagosan hányszor jár az igény (ezt az $(I - P)^{-1}$ mátrix adja meg), valamint hogy ott átlagosan mennyi időt tölt:

- egy M/M/1 szerverben töltött idő átlagosan $\frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$;
- egy M/M/∞ szerverben töltött idő átlagosan $\frac{1}{\mu_i}$ (nincs várakozás).

4. feladat

(c) Innen az átlagos rendszerben töltött idő

$$\begin{aligned}W =&[(I-P)^{-1}]_{1,1}\frac{1}{\mu_A-\lambda_A}+[(I-P)^{-1}]_{1,2}\frac{1}{\mu_B-\lambda_B}\\&+[(I-P)^{-1}]_{1,3}\frac{1}{\mu_C-\lambda_C}+[(I-P)^{-1}]_{1,4}\frac{1}{\mu_D}\\&+[(I-P)^{-1}]_{1,5}\frac{1}{\mu_E}=3.738.\end{aligned}$$