

Pólya–Szegő szeminárium 4.

7. feladatsor

2005. november 7.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geq 5$ egész, akkor $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ összetett szám.
2. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészhez létezik olyan x pozitív egész szám, hogy az

$$x + 1, x^x + 1, x^{x^x} + 1, \dots$$

sorozat minden tagja osztható n -nel.

3. Legyen egy $\pi \in S_n$ permutáció $\text{inv}(\pi)$ inverziós száma az olyan $i < j$ párok száma, melyekre $\pi(i) > \pi(j)$. Bizonyítsuk be, hogy $\text{inv}(\pi) = \text{inv}(\pi^{-1})$.
4. Legfeljebb hány (a) páros, illetve (b) páratlan elemszámú részhalmazzal lehet kiválasztani egy $2n$ elemű halmazból úgy, hogy bármely kettőnek a metszete páros elemszámú legyen?
5. Jelölje a Catalan-számokat

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Lássuk be, hogy

$$1 = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \vdots & & & \\ C_{n-1} & C_n & \dots & C_{2n-2} \end{vmatrix}$$