**Pólya–Szegő szeminárium 4.**
**8. feladatsor**
**2005. november 14.**

**1.** Határozzuk meg, a következő sorozat elemei közül melyek prímszámok:

$$101, 10101, 1010101, \ldots$$

**2.** Legyen $(s_n)$ pozitív számok monoton növő, végtelenhez tartó sorozata. Definiáljuk a sorozat $N$ számláló függvényét: minden pozitív $s$-re $N(s)$ legyen a sorozat $s$-nél nem nagyobb tagjainak száma.

Lássuk be, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{s_n} = \liminf_{s\to\infty} \frac{s}{N(s)}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{s_n} = \limsup_{s\to\infty} \frac{s}{N(s)}$$

**3.** Bizonyítsuk be, hogy minden $k$ pozitív egészhez van olyan $N(k)$ szám, hogy $n > N(k)$ esetén

$$[1, 2, \ldots, n] > n^k.$$

(Itt $[1, 2, \ldots, n]$ az $1, 2, \ldots, n$ számok legkisebb közös többszöröse.)

**4.** Legyen az $f$ korlátos (valós) függvény Riemann-integrálható a $[0, 1]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív $\varepsilon$-hoz található olyan $p$ polinom, amelyre $p(x) \le f(x)$ minden $x \in [0, 1]$-re, de

$$\int_0^1 (f(x) - p(x))\, dx < \varepsilon$$

**5.** Jelölje $P(n, k)$ azt a számot, ahányféleképpen $n$-et $k$ darab egynél nagyobb egész szorzatára lehet bontani, ha a tényezők sorrendje is lényeges.

Lássuk be, hogy egynél nagyobb $n$-re

$$\mu(n) = -P(n, 1) + P(n, 2) - P(n, 3) + \ldots$$

ahol $\mu$ a Möbius-függvény.

**6.** Jerry egy négyzet alakú medencében középen van, míg Tom a parton várakozik. Tom négyszer olyan gyorsan fut, mint ahogy Jerry úszik, viszont Jerry gyorsabban fut, mint Tom. El tud-e menekülni Jerry?