Pólya–Szegő szeminárium 4.
9. feladatsor
2005. november 21.

1. Mutassuk meg, hogy ha G teljes irányított gráf nem erősen összefüggő, akkor van olyan éle, amelyet megfordítva erősen összefüggővé tehető.

2. Legyen $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r$, és tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ valós számok közül legalább az egyik irracionális. Bizonyítsuk be, hogy a $P(n) - \lfloor P(n) \rfloor$ sorozatnak végtelen sok torlódási pontja van.

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész létezik, melyre

$$2^n \equiv 1 \pmod{n}$$

4. Legyen A részbenrendezett halmaz, mely teljesíti a következő két feltételt: (a) nincsen A-ban végtelen leszálló lánc, (b) A bármely végtelen részében van két összehasonlítható elem. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható véges sok $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elem A-ból úgy, hogy bármely másik elemnél kisebb az a_i-k valamelyike.

5. Tekintsük az $U_n(x/2)$ Csebisev-polinomok együtthatóit:

$$U_n(x/2) = u_{n,n}x^n + u_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + u_{n,1}x^1 + u_{n,0}$$

ahol

$$U_n(\cos\vartheta) = \sin((n+1)\vartheta)/\sin\vartheta$$

Másrészt legyen $c_{y+x,y-x}$ az origóból az (x, y) pontba vezető olyan utak száma, amelyek y darab felfele mutató $(0,1)$, és x darab jobbra vezető $(1,0)$ szakaszból állnak, és teljesen az $x = y$ átló felett mennek. Ha k és l paritása különböző, akkor legyen $c_{k,l} = 0$.

Az előbbi két számtáblázatból háromszög-mátrixot képezünk. Lássuk be, hogy a két kapott mátrix egymás inverze:

$$\begin{pmatrix} u_{0,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_{1,0} & u_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_{N,0} & u_{N,1} & u_{N,2} & \ldots & u_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{0,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{1,0} & c_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_{N,0} & c_{N,1} & c_{N,2} & \ldots & c_{N,N} \end{pmatrix} = I$$

6. Legyen g a függvény z_0 egy környezetében reguláris. Ha a

$$g(z) + g'(z) + g''(z) + \cdots + g^{(n)}(z) + \ldots$$

sor konvergens $z = z_0$-ban, akkor g reguláris módon kiterjeszthető az egész komplex számsíkra, és a sor mindenhol konvergens.