

Differenciálgeometria elmélet 2. zh-ra

Felület megadása lehetséges

- Gauss-féle paraméterezéssel: $\mathbf{r}(u, v)$ vagy $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$,
- Implicit egyenlettel: $F(x, y, z) = 0$,
- Explicit egyenlettel: $z = f(x, y)$.

Mostantól a felületet úgy tekintjük, hogy Gauss-féle paraméteres egyenlettel (egyenletrendszerrel a koordinátákra) van megadva.

Egy felületi görbét megadhatunk $u(t), v(t)$ alakban. Paramétervonalak az $u = \text{konstans}$ illetve $v = \text{konstans}$ görbék.

A felület érintősíkjának egyenlete:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

A felület normális egységvektora (ami az érintő sík normálvektora):

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

Egy felület első főmennyiségei a következők:

$$E = \mathbf{r}_u^2, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v^2.$$

Egy felület első alapformája

$$\varphi_1 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Az első főmennyiségekkel kiszámolhatjuk

- két felületi görbe szögét: $u_1(t), v_1(t)$ és $u_2(t), v_2(t)$ φ szögére teljesül

$$\cos \varphi = \frac{(\dot{u}_1, \dot{v}_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\dot{u}_1, \dot{v}_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix}} \sqrt{(\dot{u}_2, \dot{v}_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix}}}$$

- egy felületi görbe ívhosszát; az $u(t), v(t)$ görbe t_1 és t_2 pontjai közé eső ívhossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{u}, \dot{v}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}} dt.$$

- a felület egy darabjának felszínét (D a paramétertartomány megfelelő darabja):

$$F = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Egy felület második főmennyiségei a következők:

$$L = \frac{[\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{[\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{[\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

A felület második alapformája:

$$\varphi_2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

Egy felület normálmetszete a felületnek egy, a felületi normálist tartalmazó síkkal alkotott metszésvonala.

Egy felületi görbe g normálgörbülete a $\kappa \mathbf{n}$ vektornak (κ a görbe görbülete, $\mathbf{n}$ a görbe normális egységvektora) az $\mathbf{m}$ felületi normálisra eső vetületének a hossza, azaz $g = \kappa \mathbf{n} \mathbf{m}$.

Igaz, hogy $g = \kappa \mathbf{n} \mathbf{m} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$. Ez úgy is írható, hogy ha $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ szöge α , akkor $g = \kappa \cos \alpha$ (ez Meusnier tétele).

A felület adott pontbeli normálgörbületeinek szélsőértékeit főgörbületeknek, azokat az érintőirányokat, melyekben ezek fellépnek, főirányoknak nevezzük.

A főirányokra teljesül

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet $k = \frac{\dot{u}}{\dot{v}}$ -ban.

Ha g_1 és g_2 a főgörbületek, akkor $K = g_1 g_2$ a szorzatgörbület és $H = g_1 + g_2$ az összeggörbület. Ezekre teljesül

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN + LG - 2FM}{EG - F^2}.$$

Ezekből g_1 és g_2 meghatározható.

A felület pontjainak osztályozása:

- ha $LN - M^2 < 0$, akkor hiperbolikus pont,
- ha $LN - M^2 = 0$, akkor parabolikus pont,
- ha $LN - M^2 > 0$, akkor elliptikus pont.

A Dupin-indikatrix egyenlete:

$$\zeta = \frac{1}{2}(L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2), \quad \zeta = \pm \frac{1}{2}$$