

Sztoczasztika  
1. feladatsor: Ismétlés  
2017. szeptember 8.

1. Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje  $E_1$  azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje  $F$  azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy  $E_1$  és  $F$  nem függetlenek. Legyen  $E_2$  az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7.  $E_2$  független-e  $F$ -től?
2. Legyenek  $A, B$  és  $C$  teljesen független események egy valószínűségi mezőn;  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/4, \mathbf{P}(C) = 1/3$ . Mennyi  $\mathbf{P}((A \cap B) \cup C)$ ?
3. Egy céllövöldében hat puska van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célbatalálunk? Mekkora a valószínűsége, hogy 0,8-as puskát választottunk, feltéve, hogy a lövésünk talált?
4. Egy bizonyos betegségre kifejlesztett teszt úgy működik, hogy ha a tesztalany beteg, akkor a teszt mindenképpen beteget jelzi a betegséget, míg hogy ha az alany egészséges, 1% eséllyel akkor is betegséget jelez (99% eséllyel pedig azt, hogy az alany egészséges). A populációban átlagosan minden 10000. ember szenved ebben a betegségben. Feltéve, hogy egy találomra választott embernél a teszt betegséget jelez, mekkora az esélye, hogy valóban beteg?
5. Egy tesztvizsgán 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{5}{7}$ ; csak azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{1}{7}$ ; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek  $\frac{1}{7}$  a valószínűsége, és ekkor  $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$  valószínűséggel válaszolunk igent, vagy nemet. Mekkora valószínűséggel válaszolunk az első kérdésre helyesen? Milyen eloszlású a helyes válaszok száma? Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 18 helyes választ érünk el?
6. Feldobunk egy szabályos érmét kétszer. Legyen  $A$  az az esemény, hogy az első dobás fej,  $B$  az az esemény, hogy a második dobás fej,  $C$  az az esemény, hogy a két dobás eredménye különböző. Gondoljuk meg, hogy  $A, B$  és  $C$  páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.
7. Nevezzünk egy Bernoulli(1/2) eloszlású valószínűségi változót *véletlen bitnek*. Adott 10 teljesen független véletlen bit,  $X_1, \dots, X_{10}$ . Állítsunk elő a segítségükkel minél több páronként független véletlen bitet!
8. 5 szabályos pénzérmét feldobunk, mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 fejet kapunk?
9. Egy bitsorozatban minden bit értéke 1/100 valószínűséggel hibás.
  - (a) Legyen  $X$  az első hibás bit pozíciója. Milyen eloszlású  $X$ ?
  - (b) Legyen  $Y$  a hibás bitek száma az első 500 bitből. Milyen eloszlású  $Y$ ?
  - (c) Legyen  $X_1, X_2, \dots$  független, optimista geometriai eloszlású valószínűségi változók sorozata ( $p$  paraméterrel),  $n$  pedig rögzített pozitív egész. Legyen  $N$  a legkisebb olyan egész szám, hogy  $X_1 + \dots + X_{N+1} > n$ . Milyen eloszlású  $N$  és miért?
10. Egy 120 fős középiskolai évfolyam biológia és matematika jegyei a következőképpen alakultak:

$B \setminus M$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	4
2	2	4	4	8	2
3	4	8	8	12	8
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4

Kiválasztunk egy tanulót az évfolyamból találomra; legyen a matematika jegye  $X$ , a biológia jegye  $Y$ .

- (a)  $\mathbf{P}(\text{a kiválasztott tanuló megbukott legalább az egyik tárgyból}) = ?$
- (b)  $\mathbf{P}(X > Y) = ?$
- (c)  $\mathbf{P}(X = 5 | Y = 1) = ?$

11. Egy 500 oldalas könyv 500 sajtóhibát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legfeljebb 2 sajtóhiba van? (Feltesszük, hogy minden hiba bármelyik oldalra egyforma valószínűséggel esik.)
12. Jelölje  $X$  egy szabályos kockával való dobás értékét. Számoljuk ki  $X$  várható értékét és szórását.
13. Pistike és Móricka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz  $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$  valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak  $\frac{1}{2}$  a valószínűsége, a többi számnak  $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$ . Találomra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Móricka, majd elkezdnek dobálni.
  - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy Pistike első két dobása 6-os?
  - (b) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy az első két dobása 6-os lett?