

2. feladatsor
Ismétlés
2017. szeptember 22.

1. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találmra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

Legyen X a szabadba kijutáshoz szükséges idő, Y pedig a legelső alkalommal kiválasztott ajtó sorszáma. Gondoljuk meg, miért teljesülnek a következő egyenletek:

$$\mathbf{E}(X | Y = 1) = 2, \quad \mathbf{E}(X | Y = 2) = \mathbf{E}(X | Y = 3) = 1 + \mathbf{E}X$$

$$\mathbf{E}(X | Y = 4) = \mathbf{E}(X | Y = 5) = 3 + \mathbf{E}X.$$

Számítsuk ki $\mathbf{E}X$ értékét.

2. Egy hőmérő úgy működik, hogy ha a valódi hőmérséklet Celsius-fokban mérve x , akkor a hőmérő $x - 1$ és x között egyenletes véletlenszerű értéket jelez ki. Ezt kiküszöbölendő 5-ször mérnek vele egymás után, majd a legnagyobb értéket veszik figyelembe. Mekkora a valószínűsége, hogy az így kapott szám 0,2 foknál többel tér el a valódi hőmérséklettől?
3. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama, X (100 órában megadva) exponenciális eloszlású úgy, hogy $\mathbf{P}(X > 10) = 0.8$. Mi az eloszlás paramétere és mennyi X várható értéke?
4. Egy populációban a nők magasságának eloszlása normálisnak tekinthető, várható értéke 167 cm, szórása 10 cm. Mekkora a valószínűsége, hogy egy találmra választott nő magassága legalább 190 cm?
5. Tivadar egy videojátékkal játszik, melyben minden egyes játékban az előzményektől függetlenül $1/20$ eséllyel megszerzi a kincset. Jelölje X azt, hogy hány játékra van szüksége ahhoz, hogy először megszerezze a kincset.
- (a) Milyen eloszlású X ? Mekkora a valószínűsége, hogy több, mint 30 játékra van szükség a kincs megszerzéséhez?
- (b) Feltéve, hogy az első 3 játékban nem sikerült megszereznie a kincset, mekkora a valószínűsége, hogy még több, mint 30 játékra van szükség a kincs megszerzéséhez?
- (Ez a geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága.)
6. Florida partjainál évente átlagosan 2,3 cápatámadás történik. Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb egy támadás történik?
7. Egy gépben egy alkatrész élettartama (napban mérve) exponenciális eloszlású, $1/30$ paraméterrel. Feltéve, hogy a gép 10 napig ment, és az alkatrész nem romlott el, mi az alkatrész hátralévő élettartamának eloszlása? (Ez az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága.)
8. Egy labdahajító versenyen 3, 4 és 5 fős csapatok vesznek részt. Mindhárom féle csapatból ugyanannyi van. A verseny minden résztvevője egyformán dob, egy dobás eredménye véletlenszerű, sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{15}{x^2}, \quad 10 \leq x \leq 30$$

- (a) Mennyi egyetlen dobás nagyságának várható értéke?
- (b) A versenyen minden egyes csapat minden tagja háromszor dob, a csapat eredménye a legnagyobb dobás. Határozzuk meg egy háromfős csapat eredményének eloszlásfüggvényét.
- (c) Határozzuk meg egy találmra kiválasztott csapat eredményének eloszlásfüggvényét.
9. Tegyük fel, hogy egy webkiszolgálóhoz percenként átlagosan 5 kiszolgálási igény érkezik. Mi a valószínűsége, hogy egy 30 másodperces periódusban legalább 3 kérést kell kiszolgálni?

10. Egy 500 oldalas könyv oldalanként átlagosan 1 sajtóhibát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legfeljebb 2 sajtóhiba van?
11. Egy teherautón lévő sóder mennyisége 8 és 10 m^3 között egyenletes eloszlású. A teherautóról leömlő sóder egy kúpba rendeződik, ahol a kúp magassága és sugara egyenlő. Mekkora a sóder által elfoglalt terület várható értéke (m^2 -ben)?
12. Egy alacsony forgalmú úton átlagosan percenként két autó megy el. Kiállunk az út mellé egy adott időpontban. Jelölje Y azt, hogy hány autót látunk két perc alatt. Milyen Y eloszlása? Jelölje X azt, hogy mennyi idő telik el az első autóig. Milyen X eloszlása?