

3. feladatsor
Poisson-pontfolyamat, generátorfüggvény, elágazó folyamatok
2017. október 6.

1. Egy kis forgalmú úton átlagosan 2 percenként halad el egy autó. Kiállok az út mellé és számolom az autókat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...
 - (a) 5 percen keresztül egy autó sem halad el mellettem?
 - (b) 4 perc alatt legfeljebb 3 autó megy el mellettem?
 - (c) 2 percen át nem megy el mellettem autó, majd az azt követő 2 percben pontosan 3?
 - (d) Minden tizedik elhaladó autó piros. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 5 perc alatt nem megy el mellettem piros autó?
 - (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt 1 piros és 2 más színű autó megy el mellettem?
2. Egy irodában két ügyintéző, András és Bea fogadják a beérkező hívásokat. Átlagosan 5 percenként érkezik egy hívás; minden hívásnál feldobnak egy szabályos érmét, hogy eldöntsék, melyikük fogadja. Mekkora a valószínűsége annak, hogy...
 - (a) 10:00 és 10:20 között András pontosan 2 hívást fogad?
 - (b) 10:00 és 10:20 között András fogadja az összes beérkező hívást?
 - (c) 10:00 és 10:20 között András pontosan 2 hívást fogad, feltéve, hogy ez alatt az időszak alatt ő fogadja az összes beérkező hívást?
3. Egy szerverhez A és B típusú csomagok érkeznek, másodpercenként átlagosan 1 A típusú és 1.5 B típusú.
 - (a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy 2 másodperces intervallum alatt pontosan 2 csomag érkezik összesen.
 - (b) Mekkora a valószínűsége, hogy az első érkező csomag A típusú?
 - (c) Jelölje T azt, hogy mennyit kell várnunk az első csomagra. Milyen eloszlású T ?
4. Egy telefonközpontba 5 perc alatt átlagosan 8 helyi hívás és 2 távolsági hívás érkezik.
 - (a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik?
 - (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?
 - (c) Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy egy 2 perces időszak alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik, feltéve, hogy ugyanezen idő alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?
5. Egy bizonyos fajta keksz csokidarabokat és mazsolákat tartalmaz; egy darab keksz átlagosan 3 csokidarabot és 2 mazsolát tartalmaz.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy keksz pontosan 2 csokidarabot tartalmaz?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy egy kekszben nincs mazsola?
 - (c) Feltéve, hogy egy keksz 2 darabot tartalmaz mazsolából és csokidarabból összesen, mi a feltételes valószínűsége, hogy az mindkettő csokidarab?
 - (d) Pistike megeszik egy fél kekszet. Mi a valószínűsége, hogy abban volt legalább 1 mazsola?
 - (e) Pistika megeszi a másik felét is a keksznek. Feltéve, hogy az első felében volt legalább 1 mazsola, mennyi a feltételes valószínűsége, hogy az egész kekszben van legalább 2 mazsola?
6. Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Jelöljük $G(z)$ -vel a generátorfüggvényét. Írjuk fel $Y := X + 1$ és $Z := 2X$ generátorfüggvényét G segítségével.
7. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$

Határozzuk meg az eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket). Határozzuk meg X várható értékét és szórását is.

8. Egy szabályos érmét feldobunk 3-szor, majd feldobunk egy szabálytalan érmét is 3-szor; utóbbi érménél a fej valószínűsége $1/3$. Jelölje X az összes fej számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét.

9. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.
- Írjuk fel egy dobókocka generátorfüggvényét. Hogyan kapható meg ebből $\mathbb{E}Y$ értéke?
 - Írjuk fel X generátorfüggvényét és számítsuk ki ez alapján $\mathbb{E}X$ -et és $\mathbb{D}X$ -et.
10. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg X generátorfüggvényét kétféle módon is: egyrészt közvetlenül az eloszlásából, másrészt teljes várható érték tétellel.
- (b) Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után (pl. a 6134622665 sorozat esetén ez az érték 9). Mi lesz Y eloszlásának generátorfüggvénye?
11. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.
- Jelölje X_4 Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét. Számítsuk ki $\mathbb{E}X_4$ és $\mathbb{D}(X_4)$ értékét.
 - Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.
12. Jelölje $\Theta(p)$ a kihalás valószínűségét egy olyan elágazó folyamatnál, melynél az utódeloszlás
- $$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$
- (Ez a pesszimista geometriai eloszlás.)
- Számítsuk ki $\Theta(p)$ értékét tetszőleges $0 < p < 1$ esetén.
13. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G . Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!
- A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k .
 - A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.
14. Egy lánclevél arra kéri az olvasóját, hogy továbbítsa 12 másik embernek. Az emberek 92%-a kitörli a levelet továbbítás nélkül, de 8% továbbítja 12 másik embernek.
- Modellezzük a helyzetet elágazó folyamattal. Mi az utódeloszlás várható értéke? A folyamat szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus?
 - Mekkora a valószínűsége, hogy a levél terjedése előbb-utóbb megáll?
 - Feltéve, hogy a lánclevél kitalálója elküldte a levelet 12 embernek, mennyi az összes elküldött levél számának várható értéke a lánclevél élettartama folyamán?
15. Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X_1 másik embernek, ahol X_1 pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiekétől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történetet, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.
- Mennyi X_1 várható értéke?
 - Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció” létszáma 0)?
 - Jelölje X_3 a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbb{E}X_3$ és $\mathbb{D}X_3$ értékét.
 - Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)
 - Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.
 - * Határozzuk meg N generátorfüggvényét. (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első generáció létszáma szerint.)
16. * Legyen $\mu > 1$, és tekintsünk egy $\text{POI}(\mu)$ utódeloszlású elágazó folyamatot. Bizonyítsuk be, hogy ezen folyamat eloszlása *azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal*, megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása $\text{POI}(\lambda)$, ahol λ a $\lambda e^{-\lambda} = \mu e^{-\mu}$ egyenlet azon megoldása, amelyre $\lambda < 1$. (Figyelem! A teljes folyamat eloszlásáról van szó, azaz arról a valószínűségi mértékről, amely megmondja, hogy a teljes folyamat mekkora valószínűséggel vesz fel adott véges vagy végtelen fákát.)