5. feladatsor
Markov-láncok
2017. november 3.

1. Egy Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

   (a) Rajzoljuk fel a Markov-lánc gráf-reprezentációját!
   (b) Irreducibilis-e a Markov-lánc? Adjuk meg a tranziens és rekurrens osztályokat!

2. Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

3. Egy 5×5-ös sakktáblán egy huszár lépked véletlenszerűen úgy, hogy minden egyes lépésben a lehetséges lépések közül egyenletesen választ. Jelölje X_n a pozícióját az n. lépés után.
   (a) Gondoljuk meg, hogy X_n Markov-lánc. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?
   (b) Adjuk meg a stacionárius eloszlását.
   (c) Tegyük fel, hogy most a középső mezőn áll a huszár. Mekkora a valószínűsége, hogy 99 lépés után ismét a középső mezőn áll? És 100 lépés után?

4. Egy Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Rajzoljuk fel a Markov-lánc gráf-reprezentációját!
   (b) Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e a Markov-lánc?
   (c) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 3 lépés múlva?
   (d) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 101 lépés múlva?
   (e) Hosszú távon az idő mekkora részében van az 1-es állapotban?

5. Jónás gépjármű-felelősségbiztosítója 4 kategóriába osztja az ügyfeleket: 1, 2, 3, 4. Ha egy ügyfél egy éven át nem okoz balesetet, egy kategóriával feljebb kerül (illetve ha a 4-esben volt, akkor ott marad). Ha egy ügyfél súlyos balesetet okoz, akkor a következő évben az 1-es kategóriába kerül. Ha egy ügyfél egy adott évben könnyű balesetet okoz, de súlyos balesetet nem, akkor a következő évben egy kategóriával lejjebb kerül (ha az 1-esben volt, akkor ott marad).

   Jónás egy év alatt 1/12 eséllyel okoz súlyos balesetet, és 1/4 annak az esélye, hogy okoz könnyű balesetet, de súlyosat nem.

   (a) Modellezzük a folyamatot Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy Jónás két év múlva a 2-es kategóriába tartozik, ha most a 4-es kategóriában van?
   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriába esik?
   (d) Hosszú távon az évfordulók mekkora része olyan típusú, hogy 3-as kategóriából 4-es kategóriába lép?
   (e) Az egyes kategóriák esetén az éves díj rendre 120000, 72000, 54000, 36000 forint. Mennyi a Jónás által fizetett éves díj hosszú távon átlagosan?

6. A Sóder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,4 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 2,7 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 50% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 60% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy A típusút fogadnak el.

   (a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon.

   (c) A cégvezetés azon gondolkodik, hogy érdemes-e preferálni inkább a B típusú munkát olyankor, amikor mindkettőre érkezik megrendelés. Segítsünk nekik a döntésben!

7. Ottó munkahelyén minden dolgozót az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kategória valamelyikébe sorolnak. Ottó minden hónap végén a korábbi hónapoktól függetlenül 1/2 valószínűséggel eggyel magasabb kategóriába kerül (az 5-ös kategóriában helyben marad), 1/3 valószínűséggel eggyel alacsonyabb kategóriába kerül (az 1-es kategóriában helyben marad) és 1/6 valószínűséggel ugyanabban a kategóriában marad.

   (a) Számoljuk ki a stacionárius eloszlást.

   (b) Az egyes kategóriákban fizetési bónuszt kapnak; a bónusz összege rendre 0, 10000, 20000, 30000, 40000, 50000 forint. Számítsuk ki, hosszú távon Ottó átlagosan mennyi bónuszt kap.

8. Ottó bácsi minden reggel $\frac{2}{3}$ eséllyel megveszi az aznapi újságot és beteszi a többi közé. Vacsora előtt a felesége $\frac{1}{4}$ eséllyel az egész újságkupacot kidobja (akár hozott Ottó bácsi újságot, akár nem). Ha összegyűlik 4 újság, azonnal kidobja őket. Egy este vacsora után meglátogatjuk Ottó bácsit. Mi az ekkor az újságkupacban lévő újságok számának eloszlása? Mennyi az újságkupac átlagos mérete?

9. Jónás kedvenc számítógépes játékában 3 pálya van. Ha az 1-es pályát sikerül teljesítenie, továbblép a 2-es pályára, de ha nem, akkor ismét az 1-est kell megpróbálnia. Ha a 2-es pályát teljesíti, továbblép a 3-as pályára, de ha nem, visszaugrik az 1-es pályára. A játékot akkor nyeri meg, ha a 3-as pályát is teljesíti. A 3-as pálya után mindenképpen az 1-es következik. Az 1-es pályát 3/4 eséllyel teljesíti (az előzményektől függetlenül), a 2-es pályát 2/3 eséllyel, a 3-as pályát 1/2 eséllyel. Jelölje X_n azt, hogy n pálya után éppen melyik pályán játszik.

   (a) Gondoljuk meg, hogy X_n Markov-lánc. Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?

   (b) Tegyük fel, hogy most az 1-es pálya következik. Mekkora a valószínűsége, hogy sikeresen teljesíti mindhárom pályát egyhuzamban?

   (c) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?

   (d) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?

   (e) Átlagosan a próbálkozások mekkora részét tölti az 1-es pályával hosszú távon?

   (f) Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pálya múlva éppen megnyeri a játékot?

   (g) Átlagosan hány pályát kell végigjátszania ahhoz, hogy egyszer megnyerje a játékot?

   (h) Az első pálya átlagosan 6 percig tart (sikerességtől függetlenül), a második 12 percig, a harmadik 18 percig. Mennyi időt tölt egy pályával átlagosan?

10. A Faláb FC az egyetemi focibajnokságban játszik. A bajnokságnak 3 osztálya van: A, B és C. A C osztályból 2/3 valószínűséggel feljutnak a B osztályba a következő szezonra, egyébként maradnak a C osztályban (az előzményektől függetlenül). A B osztályból 1/2 valószínűséggel feljutnak az A osztályba, 1/2 valószínűséggel maradnak a B osztályban és 1/3 valószínűséggel visszaesnek a C osztályba. Az A osztályban 1/10 valószínűséggel megnyerik a bajnokságot, 2/5 valószínűséggel nem nyernek, de maradnak az A osztályban, 1/2 valószínűséggel pedig kiesnek a B osztályba.

   (a) Modellezzük a Faláb FC szezononkénti szereplését Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?

   (b) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 szezonnal később a B osztályban vannak?

   (c) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 szezonnal később a B osztályban vannak?