

6. feladatsor
Folytonos idejű Markov-láncok
2017. november 17.

1. Egy diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Folytonos idejű Markov-láncot készítünk belőle úgy, hogy az egyes állapotokban eltöltött idő exponenciális rendre 1, 2, 1, 4 paraméterrel.

- (a) Írjuk fel a generátort.
 - (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Mi a kapcsolat a stacionárius eloszlás és az eredeti diszkrét Markov-lánc stacionárius eloszlása között?
 - (c) A Markov-lánc a 0 időpontban az 1-es állapotban tartózkodik. Adjunk becslést arra, hogy mekkora valószínűséggel tartózkodik a 2-es állapotban a $t = 100$ illetve a $t = 0.01$ időpontokban.
2. Egy gép $\text{Exp}(0,1)$ ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás $\text{Exp}(0,5)$ ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.
- (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.
 - (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?
 - (c) Amíg a gép működik, óránként 12000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 3000 forint. Mekkora „nettó” bevételt termel óránként a gép hosszú távon?
 - (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenetmátrixát. (Ebben az esetben nem túl izgalmas.)
3. Egy forgalmas helyen lévő pénzváltóba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 2 percig tart. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül még legfeljebb ketten tartózkodhatnak a helyiségben; ha olyankor érkezne ügyfél, amikor a helyiség tele van, akkor azonnal továbbmegy (mondjuk egy másik pénzváltóhoz).
- (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
 - (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
 - (c) Hosszú távon az idő mekkora részében van tele a helyiség?
 - (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenetmátrixát.
4. A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.
- Jelölje a sérült csatárok számát a t időpontban X_t .
- (a) Modellezzük X_t -t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben „modell” a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?
 - (b) Írjuk fel a generátort.
 - (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
 - (d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?
 - (e) Átlagosan hány csatárral játszanak?
 - (f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 10 napban végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).
5. Egy távközlési kábelben három független adatfolyam megy. Az adatfolyamok egyformák; egy adatfolyamnak két állapota van: ON állapotban 1 Mb/s a sebessége, OFF állapotban 0 Mb/s. ON állapotból λ rátával lép át OFF állapotba és OFF állapotból μ rátával lép át ON állapotba. Az adatfolyamok egymástól függetlenek. Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban mennyi a három adatfolyam együttes sebessége. Gondoljuk meg, hogy X_t -re teljesül a Markov-tulajdonság, majd írjuk fel a generátorát.

6. Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgáltatnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez.
 - (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov láncsal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.
 - (b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.
 - (c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?
 - (d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?
 - (e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?
 - (f) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?
7. Egy lépcsőházban 3 villanykörte van. Egy villanykörte élettartama (évben mérve) exponenciális idejű 1 paraméterrel. A házmaster csak akkor nyúl a villanykörtékhez, ha mindhárom kiégett, akkor viszont azonnal kicseréli mindhármat újakra. Jelölje $X(t)$ a működő villanykörték számát a t időpontban.
 - (a) Gondoljuk meg, hogy $X(t)$ folytonos idejű Markov-lánc. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátorát. (Figyeljünk a rátákra!)
 - (b) Tegyük fel, hogy most mindhárom villanykörte ég. Számítsuk ki pontosan, mekkora a valószínűsége, hogy a következő 1 hónapban folyamatosan mindhárom égni fog.
 - (c) Tegyük fel, hogy most mindhárom villanykörte ég. Adjunk becslést annak a valószínűségére, hogy pontosan 1 hónap múlva mindhárom ég.
 - (d) Tegyük fel, hogy most mindhárom villanykörte ég. Adjunk becslést annak a valószínűségére, hogy pontosan 10 év múlva mindhárom ég.
8. Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan $2/3$ hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.
 - (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-láncsal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
 - (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?
 - (c) Tivadar napi díja (ezer forintban) A típusú munka esetén 40, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.
 - (d) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.
 - (e) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?
9. Adjuk meg az előző feladatban a generátort azon feltételezés mellett, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású).
 - (a) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást és vessük össze az előző feladatbeli stacionárius eloszlással. Mit tapasztalunk?
 - (b) Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.
10. Az M/M/1 rendszerben 1 szerver van, amely kiszolgálja a beérkező igényeket. Az igények egy λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek, egy igény kiszolgálási ideje pedig $\text{EXP}(\lambda)$ eloszlású. Ha a szerver foglalt, akkor a beérkező igények sorbanállnak, a buffer mérete végtelen.
 - (a) Modellezzük a rendszert végtelen állapotterű Markov-láncsal! Milyen szerkezetű a generátor?
 - (b) Milyen feltétel esetén létezik stacionárius eloszlás? (Ilyenkor mondjuk azt, hogy stabil a rendszer. Erre a modellre teljesül az is, hogy bárhonnan indítva konvergál a stacionárius eloszláshoz.)
 - (c) Gondoljuk meg, hogy hosszú távon *egy igény beérkezésének pillanatában* is stacionárius a sorhossz!
11. Az M/M/k sorbanállási rendszerben k szerver van; az igények egy λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek, egy igény kiszolgálási ideje pedig $\text{EXP}(\lambda)$ eloszlású. Ha egy igény beérkezésének pillanatában van szabad szerver, akkor az egyik szabad szerver azonnal elkezd azonnal kiszolgáltatni az igényt. λ, μ, k milyen értékei esetén lesz stabil a rendszer? Ilyenkor adjuk meg a stacionárius eloszlást is.
12. Defináljunk egy tisztán születési folyamatot úgy, hogy az n -edik állapotban a születési ráta n^2 . A folyamatot az első állapotból indítjuk. Várhatóan mennyi idő alatt jut el az n -edik állapotba? Értelmezzük az eredményt.