

7. feladatsor
Statisztika
2017. december 1.

1. Egy M/M/1 sorban az érkezési ráta λ és a kiszolgálási ráta μ . A sorhoz tartozó buffer kapacitása végtelen. Milyen (λ, μ) párok esetén lesz a sor stabil (szubkritikus)? Ebben az esetben adjuk meg a sor stacionárius eloszlását is. M/M/ k sor esetén mi a stabilitás feltétele?
2. Egy pénzérme nem szabályos, p valószínűséggel a fej lesz felül ($0 < p < 1$), de p értéke ismeretlen.
 - (a) Feldobjuk az érmét 100-szor, és azt tapasztaljuk, hogy a fejek száma 73 lett. Ez alapján adjunk maximum-likelihood-becslést p -re. Adjunk momentum-becslést is p -re.
 - (b) Feljegyezzük, hogy két szomszédos fej között mennyi írást dobtunk; a következőket kaptuk: 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0. Ez alapján is adjunk maximum-likelihood-becslést és momentum-becslést p -re.
3. Egy úton az autók λ paraméterű Poisson-pontfolyamat szerint érkeznek, λ azonban ismeretlen. Tíz különböző egy perces intervallumban megszámoltuk az érkező autókat, és a következőket kaptuk: 0, 1, 2, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 1. Adjunk ML-becslést λ értékére a minta alapján. Adjunk momentum-becslést is λ értékére.
4. Egy tóban N hal van, N azonban ismeretlen. Úgy próbáljuk N -et megbecsülni, hogy kifogunk 50 halat, megjelöljük, majd visszaengedjük őket. Valamivel később ismét kifogunk 40 halat, és azt tapasztaljuk, hogy közülük 4 jelölt. Ez alapján adjunk maximum likelihood becslést N értékére. Adjunk momentum-becslést is N értékére.
5. A családok jövedelmét egy olyan skálán mérjük, ahol $X = 1$ a létminimumnak felel meg. Feltételezzük, hogy a jövedelem eloszlása az $f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}$ ($x \geq 1$) sűrűségfüggvénnyel adható meg. (Ez az úgynevezett Pareto-eloszlás). Adjunk maximum likelihood becslést a θ -ra, ha 10 véletlenszerűen választott család jövedelme alapján: 1,53, 2,76, 19,65, 4,16, 7,31, 1,21, 254,2, 5,45, 1,12, 1,63.
6. Az X_1, \dots, X_n minta az $U[0, a]$ háttéreloszlásból származik.
 - (a) Adjunk maximum-likelihood becslést a értékére a 0,38, 0,78, 2,22, 1,91, 1,71 minta alapján.
 - (b) Adjunk momentum becslést a értékére a 0,38, 0,78, 2,22, 1,91, 1,71 minta alapján.
 - (c) Adjunk momentum becslést a értékére a 0,38, 0,20, 2,22, 0,16, 0,24 minta alapján. Mit tapasztalunk?
 - (d) Egy X_1, \dots, X_n minta az $U[a, b]$ háttéreloszlásból származik. Mi lesz a és b ML becslése a minta függvényében?
7. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású θ/t várható értékkel, ha t hőmérsékleten működtetjük. Tegyük fel, hogy az n megfigyelést a különböző t_1, \dots, t_n hőmérsékleten végeztük és x_1, \dots, x_n élettartamokat figyeltünk meg. Adjunk maximum likelihood becslést θ -ra.
8. Egy cukorgyárban a cukrot 1000 gramm névértékű zacskókba csomagolják. A gyártási technológiából eredően az egy zacskóba kerülő cukor szórása 50 gramm, a várható értéke azonban ismeretlen, jelölje m gramm. Megvizsgálunk 25 zacskót, és azt tapasztaljuk, hogy a bennük lévő cukor mennyisége átlagosan 986 gramm.
 - (a) Elfogadjuk-e 95%-os szinten az $m = 1000$ hipotézist az $m \neq 1000$ hipotézis ellenében?
 - (b) Mi lenne a helyzet, ha a szórás csak 20 gramm lenne?
 - (c) Mi lenne a helyzet, ha a szórás csak 20 gramm lenne, viszont 99%-os szinten akarnánk dönteni?
9. Egy hegy magasságát csak hibával terheltén tudjuk megmérni; ha a valódi magasság m (méterben), akkor a mérési eredmény normális eloszlású m várható értékkel és 10 méter szórással. 5 mérést végzünk, melyek eredménye rendre 3415, 3423, 3431, 3424, 3432 méter.
 - (a) Adjunk maximum-likelihood becslést m értékére a minta alapján.
 - (b) Elfogadjuk-e 95%-os szinten az $m = 3420$ hipotézist az $m \neq 3420$ hipotézis ellenében?
 - (c) Adjunk 95%-os szintű konfidencia-intervallumot a minta alapján.
10. Egy város energiafogyasztása normális eloszlású ismeretlen μ várható értékkel és a korábbi tapasztalatok alapján ismert σ szórással. n napon keresztül végeztünk méréseket x_1, \dots, x_n eredménnyel, majd az $(n+1)$ -edik naptól m napon keresztül át csak a város egyik kerületéből érkeztek adatok, ahol a fogyasztás várható értéke az egész város fogyasztásának a fele: y_1, \dots, y_m a kapott adatsor. Tételezzük fel, hogy a szórás itt is σ . Adjunk maximum likelihood becslést μ -re.