Gyakorló feladatok 2. zh-ra
Sztochasztika
2017 ősz

1. Egy orvos átlagosan 5, maximum 15 percet foglalkozik egy betegével. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy egy 12 órás műszak nem elég 100 beteg ellátására.

2. Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg 100 fejet nem kapunk. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ehhez elegendő 190 dobás. Legfeljebb mekkora lehet a becslés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

3. Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg 100 fejet nem kapunk. Adjunk nagy eltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy ehhez elegendő 150 dobás. (Segítség: a Bernoulli(p) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x\ln((x(1-p)/(p(1-x))) + \ln((1-x)/(1-p))$, és a GEO($p$) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x\ln((x-1)/(x(1-p))) + \ln((1-p)/(p(x-1)))$.)

4. Egy ipari gép intenzív használatnak van kitéve; minden nap végén 1/10 valószínűséggel (az előzményektől függetlenül) szervizelésre szorul. A szervizelés fix 1 napig tart, utána ismét használják.
   (a) Modellezzük a gép állapotát Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel az átmenetvalószínűség mátrixot.
   (b) Feltéve, hogy most éppen működik, mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva is működik?
   (c) Hosszú idő alatt az idő mekkora részében működik?
   (d) Átlagosan hány naponta kell szervizelni?
   (e) Amíg a gép dolgozik, napi 55000 forint bevételt termel. A szervizelés díja 11000 forint. Hosszú távon mekkora átlagos napi bevételt termel?

5. Egy betörő átlagosan havi 2 betörést követ el, kivéve, amikor börtönben van. Minden egyes betörésért 1/4 eséllyel kapják el. Ha elkapják, börtönbe küldik. A börtönből átlagosan 4 hónap után szabadul és újból nekilát a betöréseknek.
   (a) Modellezzük a betörő állapotát folytonos idejű Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
   (b) Feltéve, hogy most éppen szabadlábon van, mekkora a valószínűsége, hogy 10 nap múlva is szabadlábon lesz? (1 hónap tekinthető 30 napnak.)
   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy jövőre ilyenkor szabadlábon lesz?
   (d) 10 év alatt az idő mekkora részét tölti börtönben?
   (e) Az okozott kár betörésenként átlagosan 100000 forint. Hosszú távon havonta átlagosan mekkora kárt okoz a betörő?

6. Egy jogi iroda 3 jogászt foglalkoztat. Az irodába átlagosan havonta 1 ügy érkezik, amit akkor vállalnak el, ha van legalább egy szabad jogász (aki éppen nem dolgozik egy másik ügyön), és ilyenkor a szabad jogászok közül találomra döntik el, ki vállalja el (minden ügyön egy jogász dolgozik). Egy ügy átlagosan 3 hónapig tart. Jelölje $X(t)$ az iroda által vitt ügyek számát t-kor.
   (a) Modellezzük az $X(t)$ folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal. Írjuk fel a generátort és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt is.
   (b) Feltéve, hogy most éppen 0 ügyet visz az iroda, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy jövő hét ilyenkor is 0 ügyet visznek (1 hét tekinthető 7/30 hónapnak).
   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy jövőre ilyenkor 2 ügyet visznek?
   (d) Az idő mekkora részében dolgozik a három jogász közül a legfiatalabb?
   (e) Éppen 2 jogász dolgozik. Mekkora a valószínűsége, hogy valamelyikük előbb végez az aktuális ügyével, minthogy a harmadik is elvállal egy új ügyet?

7. Egy szerver terheltségét a bufferben sorban álló igények számából akarjuk megbecsülni. Tudjuk, hogy ha a terheltség $0 < q < 1$, akkor a bufferben lévő igények száma PGEO($1-q$) eloszlású. 6 különböző időpontban ránézve a szerverre, a bufferben lévő igények számára a következő adódott: 0, 3, 1, 2, 1, 0. Adjunk ML-becslést q értékére a minta alapján.

8. Egy bor alkoholtartalmát mérjük; a mérés eredménye a valódi alkoholtartalomtól eltér egy additív hibával, melynek eloszlása N(0, 0,5) (%-ban mérve). 5 mérés eredményére a következő adódott: 12,4, 13,1, 12,3, 12,2, 13,5. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a bor alkoholtartalma 12,5% azon hipotézis ellenében, hogy az alkoholtartalom nem 12,5%.