Valószínűségszámítás alapok

Sztochasztika

Illés Horváth

2024/10/22

(1) Valószínűségi mező, események
(2) Feltételes valószínűség
(3) Valószínűségi változók, eloszlások
(4) Nevezetes eloszlások
(5) 2-dimenziós eloszlások
(6) Feladatok

A *valószínűségi mező* egy $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ hármas, ahol

- Ω a kimenetelek halmaza,
- $\mathcal{F}$ az események halmaza, amik Ω részhalmazai, és
- $\mathbb{P}$ a valószínűség, ami egy $\mathcal{F}$ elemein értelmezett valós függvény.

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét 3-szor. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III\},$$

ahol F a fej, I az írás.

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét 3-szor. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III\},$$

ahol F a fej, I az írás. Példa események:

$$A = \text{„az első dobás fej”} = \{FFF, FFI, FIF, FII\},$$
$$B = \text{„mindhárom dobás egyforma”} = \{FFF, III\}.$$

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét 3-szor. Ekkor

$$\Omega = \{FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III\},$$

ahol F a fej, I az írás. Példa események:

$$A = \text{„az első dobás fej”} = \{FFF, FFI, FIF, FII\},$$
$$B = \text{„mindhárom dobás egyforma”} = \{FFF, III\}.$$

A valószínűség a következő:

$$\mathbb{P}(FFF) = \cdots = \mathbb{P}(III) = \frac{1}{8};$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{8}.$$

A valószínűségi függvény tulajdonságai

$\mathbb{P}$ mindig teljesíti a következő tulajdonságokat:

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

és ha $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt események, akkor

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

(Ennek a neve σ-additivitás.)

Példa

Példa. Válasszunk egy pontot egyenletesen a $[0,1]$ intervallumból. Ekkor

$$\Omega = [0,1],$$

és pl.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{0.5\}) &= 0, \\ \mathbb{P}([0.5, 0.7]) &= 0.2, \\ \mathbb{P}([0.5, 0.7] \cup [0.9, 1]) &= 0.3. \end{aligned}$$

Feltételes valószínűség

A és B eseményekre A *feltételes valószínűsége feltéve B-t* a következő:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Feltételes valószínűség

A és B eseményekre *A feltételes valószínűsége feltéve B-t* a következő:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A és B *függetlenek*, ha

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

vagy ezzel ekvivalens, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

A függetlenség szimmetrikus tulajdonság.

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az első dobás fej, feltéve, hogy van legalább 2 fej összesen?

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az első dobás fej, feltéve, hogy van legalább 2 fej összesen?

$$A = \text{„az első dobás fej''} = \{FFF, FFI, FIF, FII\},$$

$$B = \text{„van legalább 2 fej összesen''} = \{FFF, FFI, FIF, IFF\},$$

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az első dobás fej, feltéve, hogy van legalább 2 fej összesen?

$$A = \text{„az első dobás fej''} = \{FFF, FFI, FIF, FII\},$$
$$B = \text{„van legalább 2 fej összesen''} = \{FFF, FFI, FIF, IFF\},$$

és így

$$A \cap B = \{FFF, FFI, FIF\}.$$

Példa

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az első dobás fej, feltéve, hogy van legalább 2 fej összesen?

$$A = \text{„az első dobás fej”} = \{FFF, FFI, FIF, FII\},$$
$$B = \text{„van legalább 2 fej összesen”} = \{FFF, FFI, FIF, IFF\},$$

és így

$$A \cap B = \{FFF, FFI, FIF\}.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}.$$

Feltételes valószínűség tétele

Tétel (Bayes)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Feltételes valószínűség tétele

Tétel (Bayes)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

$B_1, \ldots, B_k$ egy teljes eseményrendszer, ha

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ ha } i \neq j,$$
$$B_1 \cup \cdots \cup B_k = \Omega.$$

Tétel (Teljes valószínűség)

Ha $B_1, \ldots, B_k$ teljes eseményrendszer, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \cdots + \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

Valószínűségi változók

Informálisan a valószínűségi változó egy véletlen szám.

Formálisan: adott valószínűségi mező esetén az X *valószínűségi változó* egy $\Omega \to \mathbb{R}$ függvény.

Informálisan a valószínűségi változó egy véletlen szám.

Formálisan: adott valószínűségi mező esetén az X *valószínűségi változó* egy $\Omega \to \mathbb{R}$ függvény.

Példa. Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Legyen X a fejek száma. Ekkor

$$\begin{aligned} X(FFF) &= 3, \\ X(FFI) = X(FIF) = X(IFF) &= 2, \\ X(FII) = X(IFI) = X(IIF) &= 1, \\ X(III) &= 0. \end{aligned}$$

Ha X csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, akkor *diszkrét* valószínűségi változónak nevezzük, míg ha tetszőleges valós értéket felvehet, akkor *folytonos* valószínűségi változónak nevezzük.

Ha X csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, akkor *diszkrét* valószínűségi változónak nevezzük, míg ha tetszőleges valós értéket felvehet, akkor *folytonos* valószínűségi változónak nevezzük.

Példa. Az utcán figyeljük az autókat.

Valószínűségi változók

Ha X csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, akkor *diszkrét* valószínűségi változónak nevezzük, míg ha tetszőleges valós értéket felvehet, akkor *folytonos* valószínűségi változónak nevezzük.

Példa. Az utcán figyeljük az autókat.

Legyen T az az idő, amit az első elhaladó autóig várnunk kell. T folytonos.

Valószínűségi változók

Ha X csak nemnegatív egész értékeket vehet fel, akkor *diszkrét* valószínűségi változónak nevezzük, míg ha tetszőleges valós értéket felvehet, akkor *folytonos* valószínűségi változónak nevezzük.

Példa. Az utcán figyeljük az autókat.

Legyen T az az idő, amit az első elhaladó autóig várnunk kell. T folytonos.

Legyen X az elhaladó autók száma 2 perc alatt. X diszkrét.

Eloszlások

Egy valószínűségi változó eloszlása az, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel.

Eloszlások

Egy valószínűségi változó eloszlása az, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel.

Ha X diszkrét, akkor az eloszlása leírható a

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

értékekkel.

Eloszlások

Egy valószínűségi változó eloszlása az, hogy milyen értéket milyen valószínűséggel vesz fel.

Ha X diszkrét, akkor az eloszlása leírható a

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

értékekkel.

Példa- Feldobunk egy szabályos érmét háromszor. Legyen X a fejek száma. Ekkor

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8},$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Eloszlások

Folytonos valószínűségi változókra az előbbi definíció nem működik. Például ha T az első elhaladó autóig való várakozási időt jelenti, akkor annak a valószínűsége, hogy T pontosan 1 perc, nulla.

Folytonos valószínűségi változókra az előbbi definíció nem működik. Például ha T az első elhaladó autóig való várakozási időt jelenti, akkor annak a valószínűsége, hogy T pontosan 1 perc, nulla. Azonban annak a valószínűsége, hogy „T kevesebb, mint 1 perc”, már pozitív.

Eloszlások

Folytonos valószínűségi változókra az előbbi definíció nem működik. Például ha T az első elhaladó autóig való várakozási időt jelenti, akkor annak a valószínűsége, hogy T pontosan 1 perc, nulla. Azonban annak a valószínűsége, hogy „T kevesebb, mint 1 perc", már pozitív.

Ennek megfelelően egy folytonos valószínűségi változó eloszlását az eloszlásfüggvénnyel írjuk le:

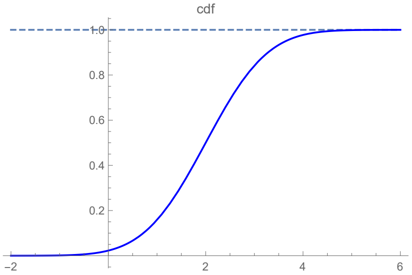
$$F(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

ahol x egy valós változó.

Eloszlásfüggvények tulajdonságai:

- $F(x)$ növő,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Bármilyen függvény, ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, megfelelő eloszlásfüggvény.

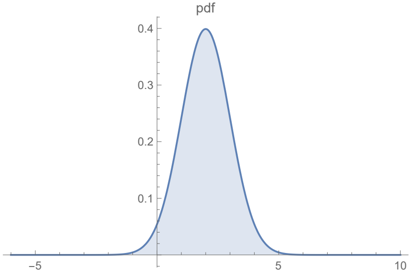


Eloszlások

Ha F deriválható, akkor $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ a megfelelő sűrűségfüggvény. Sűrűségfüggvények tulajdonságai:

- $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Bármilyen függvény, ami rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, megfelelő sűrűségfüggvény.



Eloszlások

Adott $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra

$$\mathbb{P}(X \in A) = \begin{cases} \sum\limits_{k \in A} p_k & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_A f(x)\mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

Eloszlások

Adott $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra

$$\mathbb{P}(X \in A) = \begin{cases} \sum\limits_{k \in A} p_k & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_A f(x)\mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

Egy diszkrét valószínűségi változó nagyobb valószínűséggel vesz fel olyan k értékeket, amelyekre p_k nagyobb.
Egy folytonos valószínűségi változó nagyobb valószínűséggel vesz fel értékeket olyan x közelében, ahol $f(x)$ értéke nagyobb.

Várható érték

Egy valószínűségi változó várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} kp_k & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

A várható érték X átlagos értéke.

Példa. Dobunk egyet egy szabályos 6 oldalú dobókockával, X a dobás értéke. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{7}{2}.$$

Ha X valószínűségi változó és g egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k) p_k & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

Példa. Ha X egy szabályos kockadobás értéke, akkor

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{1}{6} \cdot 3^2 + \frac{1}{6} \cdot 4^2 + \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 = \frac{91}{6}.$$

Várható érték

Példa. Legyen X eloszlása

$$\mathbb{P}(X = 49) = \mathbb{P}(X = 51) = 1/2.$$

Ekkor $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 49 + \frac{1}{2} \cdot 51 = 50.$

Legyen Y eloszlása

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 100) = 1/2.$$

Ekkor $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 = \mathbb{E}(X).$

$\mathbb{E}(X)$ jellemzi az X valószínűségi változó értékét, de azt nem, hogy X tipikusan mennyire messze van a várható értékétől.

X varianciája (szórásnégyzete)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2,$$

és X szórása

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}.$$

A szórás (és a variancia) jellemzik, hogy X tipikusan mennyire közel van $\mathbb{E}(X)$-hez. Az X-től való eltérést négyzetesen büntetik.

Tulajdonságok:

- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$
- $\mathrm{Var}(X) \geq 0$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha X 1 valószínűséggel konstans.

Szórás és variancia

Példa. Ha X egy szabályos 6 oldalú kockadobás értéke, akkor már kiszámoltuk, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{91}{6},$$

tehát

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12},$$

és

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71.$$

Várható érték és szórás tulajdonságai

A várható érték lineáris: $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstansokra

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c.$$

A várható érték lineáris: $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstansokra

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c.$$

$a, b \in \mathbb{R}$ konstansokra

$$\mathbb{D}(aX + b) = |a|\mathbb{D}(X).$$

Várható érték és szórás tulajdonságai

A várható érték lineáris: $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstansokra

$$\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c.$$

$a, b \in \mathbb{R}$ konstansokra

$$\mathbb{D}(aX + b) = |a|\mathbb{D}(X).$$

Ha X és Y független valószínűségi változók (definíció rövidesen), akkor

$$\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y).$$

Feltételes eloszlás

Egy diszkrét valószínűségi változó feltételes eloszlása feltéve egy A eseményt a következő:

$$\mathbb{P}(X = k|A) = \frac{\mathbb{P}(X = k, A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Egy folytonos valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvénye feltéve egy A eseményt:

$$F(x|A) = \mathbb{P}(X \leq x|A) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x, A)}{\mathbb{P}(A)},$$

a feltételes sűrűségfüggvény pedig $f(x|A) = \frac{\mathrm{d}F(x|A)}{\mathrm{d}x}$.

Feltételes várható érték

Egy X valószínűségi változó feltételes várható értéke feltéve egy A eseményt:

$$\mathbb{E}(X|A) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k|A) & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} xf(x|A)\mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

Feltételes várható érték

Egy X valószínűségi változó feltételes várható értéke feltéve egy A eseményt:

$$\mathbb{E}(X|A) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k|A) & \text{ha } X \text{ diszkrét} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} xf(x|A)\mathrm{d}x & \text{ha } X \text{ folytonos} \end{cases}$$

Tétel (Teljes várható érték tétel)

Ha $B_1, \ldots, B_k$ teljes eseményrendszer, akkor

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \cdots + \mathbb{E}(X|B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

X *Bernoulli eloszlású* p paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{I}(p)$, ha

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

X felfogható úgy, mint egy darab véletlen próba eredménye, ahol a siker valószínűsége p.

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

Diszkrét egyenletes eloszlás

X *diszkrét egyenletes eloszlású* n paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{DU}(n)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

X felfogható úgy, mint egy n oldalú szabályos kockával egy dobás értéke.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+n}{2}.$$

Geometriai eloszlás

X *geometriai eloszlású* p paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{GEO}(p)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

X felfogható úgy, mint az első sikeres próbáig szükséges próbák száma, ha a próbák függetlenek, és mindegyiknél p a siker valószínűsége.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

X *geometriai eloszlású* p paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{GEO}(p)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

X felfogható úgy, mint az első sikeres próbáig szükséges próbák száma, ha a próbák függetlenek, és mindegyiknél p a siker valószínűsége.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Példa. Egy szabályos dobókockával az első 6-oshoz szükséges dobások száma $\mathrm{GEO}(1/6)$ eloszlású.

Y pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel, röviden $Y \sim \mathrm{PGEO}(p)$, ha

$$\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Y felfogható úgy, mint az első sikeres próba előtt szükséges próbák száma (nem számolva a sikeres próbát), ha a próbák függetlenek, és mindegyiknél p a siker valószínűsége.

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1.$$

Y *pesszimista geometriai eloszlású* p paraméterrel, röviden $Y \sim \mathrm{PGEO}(p)$, ha

$$\mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Y felfogható úgy, mint az első sikeres próba előtt szükséges próbák száma (nem számolva a sikeres próbát), ha a próbák függetlenek, és mindegyiknél p a siker valószínűsége.

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} - 1.$$

Ha $X \sim \mathrm{GEO}(p)$, akkor $Y = X - 1 \sim \mathrm{PGEO}(p)$ és fordítva.

Binomiális eloszlás

X *binomiális eloszlású* n és p paraméterekkel, röviden $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

X a sikeres próbák száma n próbálkozásból, ha minden próba független és p valószínűséggel sikeres.

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Binomiális eloszlás

X *binomiális eloszlású* n és p paraméterekkel, röviden $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

X a sikeres próbák száma n próbálkozásból, ha minden próba független és p valószínűséggel sikeres.

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Példa. Egy szabályos érmét 10-szer feldobva a fejek száma $\mathrm{BIN}(10, 1/2)$ eloszlású.

Poisson eloszlás

X *Poisson eloszlású* λ paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{POI}(\lambda)$, ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Poisson eloszlással általában ritka eseményeket modellezünk, ahol az események száma átlagosan λ. Feltesszük, hogy az események sok független forrásból származnak, és az egyes források hozzájárulása külön-külön kicsi.

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

Poisson eloszlás

Példa. Egy alacsony forgalmú úton percenként átlagosan 2 autó halad el. Egy adott 1 perces intervallumban elhaladó autók száma POI(2) eloszlású.
Gondoljunk a következőre: azon autók száma, akik potenciálisan elhaladhatnak abban az 1 percben, nagy, de minden egyes autóra annak a valószínűsége, hogy pont abban az 1 percben pont előttünk halad el, pici. Ezzel együtt összesen a sok autóból átlagosan 2 mégiscsak elhalad ott.

Példa. Egy alacsony forgalmú úton percenként átlagosan 2 autó halad el. Egy adott 1 perces intervallumban elhaladó autók száma POI(2) eloszlású.
Gondoljunk a következőre: azon autók száma, akik potenciálisan elhaladhatnak abban az 1 percben, nagy, de minden egyes autóra annak a valószínűsége, hogy pont abban az 1 percben pont előttünk halad el, pici. Ezzel együtt összesen a sok autóból átlagosan 2 mégiscsak elhalad ott.

Példa. Egy adott városban egy év alatt a tüzek száma Poisson eloszlású.

Poisson eloszlás

Példa. Egy alacsony forgalmú úton percenként átlagosan 2 autó halad el. Egy adott 1 perces intervallumban elhaladó autók száma POI(2) eloszlású.
Gondoljunk a következőre: azon autók száma, akik potenciálisan elhaladhatnak abban az 1 percben, nagy, de minden egyes autóra annak a valószínűsége, hogy pont abban az 1 percben pont előttünk halad el, pici. Ezzel együtt összesen a sok autóból átlagosan 2 mégiscsak elhalad ott.

Példa. Egy adott városban egy év alatt a tüzek száma Poisson eloszlású.

Példa. Egy internetes szerverhez adott idő alatt érkező igények száma Poisson eloszlású.

Példa. Egy könyvben a hibák száma Poisson eloszlású.

Egyenletes eloszlás

X *egyenletes eloszlású* az $[a, b]$ intervallumon, röviden $X \sim \mathrm{U}(a, b)$, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b].$$

Ez egy olyan folytonos eloszlás, amely egy találomra kiválasztott pont helyzetét írja le egy intervallumon belül.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Exponenciális eloszlás

X *exponenciális eloszlású* λ paraméterrel, röviden $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Ez egy olyan folytonos eloszlás, amely véletlenszerűen bekövetkező eseményekig eltelt idő modellezésére használható.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

λ a *ráta* vagy sűrűség, azaz ha λ nagyobb, akkor X értéke tipikusan kisebb.

Exponenciális eloszlás

X *exponenciális eloszlású* λ paraméterrel, röviden $X \sim \text{EXP}(\lambda)$, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Ez egy olyan folytonos eloszlás, amely véletlenszerűen bekövetkező eseményekig eltelt idő modellezésére használható.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

λ a *ráta* vagy sűrűség, azaz ha λ nagyobb, akkor X értéke tipikusan kisebb.

Példas. Az első elhaladó autóig/első tűzesetig/első beérkező igényig stb. eltelt idő exponenciális eloszlású.

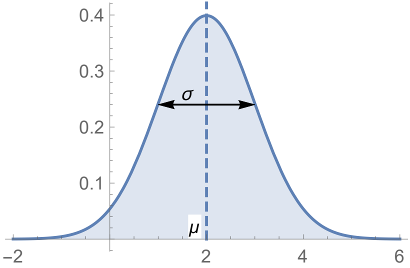
X *normális eloszlású* μ és σ paraméterekkel, röviden $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, ha a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

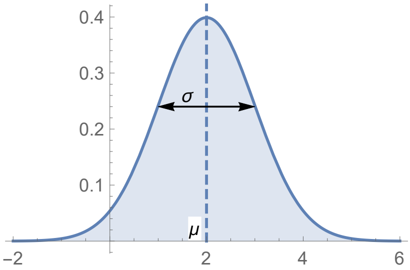
Ez egy olyan folytonos eloszlás, amellyel olyan véletlen számokat lehet modellezni, amik tipikusan közel esnek a várható értékükhöz, de kis valószínűséggel felvehetnek távolabbi értékeket is.

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{D}(X) = \sigma.$$

Normális eloszlás



Normális eloszlás



Példa. Egy populációban egy véletlenül választott ember magassága modellezhető normális eloszlással.
Példa. Mérési hibákat gyakran modelleznek normális eloszlással.

Pareto eloszlás

X *Pareto eloszlású* $A > 0$ (skála) és $\alpha > 0$ (alak) paraméterekkel, röviden $X \sim \text{Pareto}(A, \alpha)$, ha az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - \left(\frac{A}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq A.$$

Ez egy olyan folytonos eloszlás, amellyel olyan véletlen számokat lehet modellezni, amelyek extrém nagy értékeket is felvehetnek nem túl kicsi valószínűséggel.

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \frac{\alpha A}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

X *Pareto eloszlású* $A > 0$ (skála) és $\alpha > 0$ (alak) paraméterekkel, röviden $X \sim \text{Pareto}(A, \alpha)$, ha az eloszlásfüggvénye

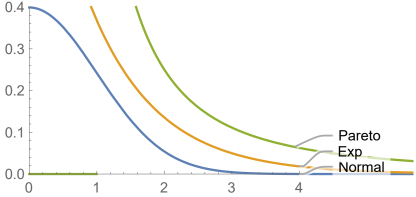
$$F(x) = 1 - \left(\frac{A}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq A.$$

Ez egy olyan folytonos eloszlás, amellyel olyan véletlen számokat lehet modellezni, amelyek extrém nagy értékeket is felvehetnek nem túl kicsi valószínűséggel.

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \frac{\alpha A}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \infty & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Példa. A városok mérete modellezhető Pareto eloszlással.
Példa. Egy társadalmon belül a vagyon eloszlása modellezhető Pareto eloszlással.

A különböző eloszlások sűrűségfüggvénye eltérő sebességgel cseng le: a normális eloszlásé nagyon gyorsan, az exponenciális eloszlásé gyorsan, a Pareto lassabban.



2-dimenziós eloszlások

Legyen X és Y 2 diszkrét valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn. Az együttes eloszlásuk jellemezhető a

$$p_{k,l} = \mathbb{P}(X = k, Y = l), \quad k = 0, 1, \ldots, l = 0, 1, \ldots,$$

értékekkel, ahol a $p_{k,l}$ számok nemnegatívak és az összegük 1.

2-dimenziós eloszlások

Legyen X és Y 2 diszkrét valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn. Az együttes eloszlásuk jellemezhető a

$$p_{k,l} = \mathbb{P}(X = k, Y = l), \quad k = 0, 1, \dots, l = 0, 1, \dots,$$

értékekkel, ahol a $p_{k,l}$ számok nemnegatívak és az összegük 1.

X és Y peremeloszlása

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l),$$

$$\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l).$$

Ha X és Y folytonos valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor az együttes eloszlásfüggvényük

$$F(x, y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y),$$

és az együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

2-dimenziós eloszlások

Ha X és Y folytonos valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, akkor az együttes eloszlásfüggvényük

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y),$$

és az együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

A peremeloszlásaik sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y, \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

Feltételes eloszlások

Ha X és Y diszkrét, akkor X feltételes eloszlása az $Y = l$ feltétel mellett

$$\mathbb{P}(X = k | Y = l) = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = l)}{\mathbb{P}(Y = l)}.$$

Feltételes eloszlások

Ha X és Y diszkrét, akkor X feltételes eloszlása az $Y = l$ feltétel mellett

$$\mathbb{P}(X = k | Y = l) = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = l)}{\mathbb{P}(Y = l)}.$$

Ha X és Y folytonos, akkor X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Feltételes eloszlások

A feltételes várható érték folytonos esetben a feltételes eloszlás szerinti várható érték:

$$\mathbb{E}(X|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x.$$

A jobboldali integrál eredménye y egy függvénye. Ennek megfelelően az $\mathbb{E}(X|Y)$ jelölés tulajdonképpen Y-nak ugyanezen függvényét jelenti.

A feltételes várható érték folytonos esetben a feltételes eloszlás szerinti várható érték:

$$\mathbb{E}(X|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x.$$

A jobboldali integrál eredménye y egy függvénye. Ennek megfelelően az $\mathbb{E}(X|Y)$ jelölés tulajdonképpen Y-nak ugyanezen függvényét jelenti.

A teljes várható érték tétel folytonos változata is igaz, és *toronyszabály* néven is ismert:

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))=\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(X|Y=y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

Függetlenség

X és Y független valószínűségi változók, ha az

$$\{X \in A\} \quad \text{és} \quad \{Y \in B\}$$

események függetlenek tetszőleges $A, B \subseteq \mathbb{R}$ esetén.

Függetlenség

X és Y független valószínűségi változók, ha az

$$\{X \in A\} \quad \text{és} \quad \{Y \in B\}$$

események függetlenek tetszőleges $A, B \subseteq \mathbb{R}$ esetén.

Tétel

X és Y pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l) \quad \forall k, l = 0, 1, \ldots$$

ha X, Y diszkrét és

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

ha X, Y folytonos.

Valószínűségi változók függvényének várható értéke

Egy $g(x,y)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\infty} g(k,l)\mathbb{P}(X=k, Y=l) & \text{ha } X, Y \text{ diszkrét,} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{ha } X, Y \text{ folytonos.} \end{cases}$$

Kovariancia

X és Y kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A kovariancia lineáris függést mér X és Y között.

Kovariancia

X és Y kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A kovariancia lineáris függést mér X és Y között.

Ha $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$, akkor ha X nagy, akkor Y tipikusan szintén nagy lesz, míg ha X kicsi, akkor Y is tipikusan kicsi lesz.

Kovariancia

X és Y kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A kovariancia lineáris függést mér X és Y között.

Ha $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$, akkor ha X nagy, akkor Y tipikusan szintén nagy lesz, míg ha X kicsi, akkor Y is tipikusan kicsi lesz.

Ha $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$, akkor ha X nagy, akkor Y tipikusan kicsi lesz és viszont.

Kovariancia

X és Y kovarianciája

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

A kovariancia lineáris függést mér X és Y között.

Ha $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$, akkor ha X nagy, akkor Y tipikusan szintén nagy lesz, míg ha X kicsi, akkor Y is tipikusan kicsi lesz.

Ha $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$, akkor ha X nagy, akkor Y tipikusan kicsi lesz és viszont.

Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (de fordítva általában nem igaz).

Korreláció

X és Y korrelációja

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}.$$

Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség)

$$-1 \leq \mathrm{Corr}(X,Y) \leq 1.$$

A korreláció lényegében a kovariancia normált változata.

Korreláció

X és Y korrelációja

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}.$$

Tétel (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség)

$$-1 \leq \mathrm{Corr}(X, Y) \leq 1.$$

A korreláció lényegében a kovariancia normált változata.

$\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$ teljes lineáris összefüggésnek felel meg X és Y között, azaz $X = cY$, ahol $c > 0$ konstans.

1. feladat

Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független-e F-től?

1. feladat

Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független-e F-től?

Megoldás.

$$\Omega = \{11, 12, \dots, 66\},$$

$$\mathbb{P}(11) = \mathbb{P}(12) = \cdots = \mathbb{P}(66) = \frac{1}{36}.$$

1. feladat

Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független-e F-től?

Megoldás.

$$\Omega = \{11, 12, \dots, 66\},$$

$$\mathbb{P}(11) = \mathbb{P}(12) = \dots = \mathbb{P}(66) = \frac{1}{36}.$$

$$E_1 = \{15, 24, 33, 42, 51\}, \qquad \mathbb{P}(E_1) = \frac{5}{36}.$$

$$F = \{41, 42, 43, 44, 45, 46\}, \qquad \mathbb{P}(F) = \frac{6}{36}.$$

1. feladat

$$E_1 \cap F = \{42\}, \qquad \mathbb{P}(E_2 \cap F) = \frac{1}{36},$$

so

$$\mathbb{P}(E_1 \cap F) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{5}{216},$$

tehát E_1 és F nem függetlenek.

1. feladat

$$E_1 \cap F = \{42\}, \qquad \mathbb{P}(E_2 \cap F) = \frac{1}{36},$$

so

$$\mathbb{P}(E_1 \cap F) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(F) = \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{5}{216},$$

tehát E_1 és F nem függetlenek.

E_1 helyett E_2-re viszont:

$$E_2 = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}, \qquad \mathbb{P}(E_2) = \frac{6}{36},$$

$$E_2 \cap F = \{43\}, \qquad \mathbb{P}(E_2 \cap F) = \frac{1}{36}.$$

Ezúttal

$$\mathbb{P}(E_2 \cap F) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(F) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$$

fennáll, tehát E_2 és F függetlenek.

2. feladat

Pistike és Móricka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a 2–5 számoknak $\frac{1}{0.12} - \frac{1}{0.12}$, az 1-esnek 0.02. Találomra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Móricka, majd elkezdenek dobálni.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy Pistike első két dobása 6-os?

(b) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy az első két dobása 6-os lett?

2. feladat

Pistike és Móricka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a 2–5 számoknak $\frac{1}{0.12} - \frac{1}{0.12}$, az 1-esnek 0.02. Találomra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Móricka, majd elkezdenek dobálni.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy Pistike első két dobása 6-os?

(b) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy az első két dobása 6-os lett?

Megoldás. Definiáljuk a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Pistike első két dobása 6-os}\}, \\ B_1 &= \{\text{Pistike a szabályos kockát vette el}\}, \\ B_2 &= \{\text{Pistike a cinkelt kockát vette el}\}. \end{aligned}$$

2. feladat

A megadott információk alapján B_1 és B_2 teljes eseményrendszer, és

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$$

mivel találomra választanak kockát,

2. feladat

A megadott információk alapján B_1 és B_2 teljes eseményrendszer, és

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$$

mivel találomra választanak kockát, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

2. feladat

A megadott információk alapján B_1 és B_2 teljes eseményrendszer, és

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$$

mivel találomra választanak kockát, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Teljes valószínűség alapján

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{72}.$$

2. feladat

A megadott információk alapján B_1 és B_2 teljes eseményrendszer, és

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$$

mivel találomra választanak kockát, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Teljes valószínűség alapján

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{72}.$$

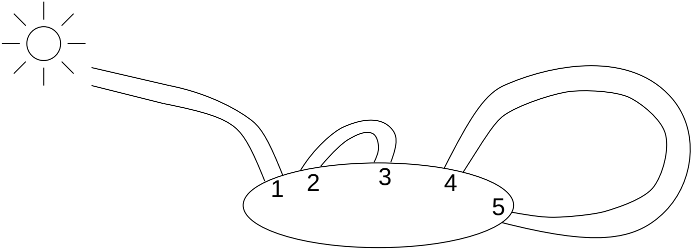
$\mathbb{P}(B_2|A)$ Bayes-tétel segítségével számítható ki:

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{10}{72}} = \frac{9}{10}.$$

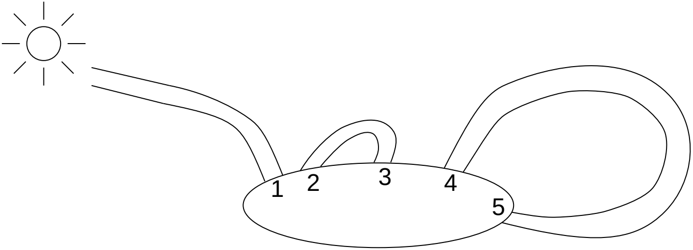
3. feladat

Egy bányász eltévedt a bányában. Jelenleg a bánya egyik termében van, amelyből 5 ajtó nyílik. Az 1. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 2 óra séta után kivezet a szabadba. A 2. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 1 óra séta után visszavezet a terembe a 3. ajtón keresztül. A 4. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 3 óra séta után visszavezet a terembe az 5. ajtón keresztül.
A bányász találomra választ egy ajtót, majd végigmegy az alagúton. Sajnos elég feledékeny, ezért ha visszaér a terembe, akkor újra találomra választ az ajtók közül egyet. Mindezt addig ismétli, amíg ki nem jut a szabadba.
Jelölje X a kijutáshoz szükséges idő várható értékét. Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$-et.

Megoldás.



Megoldás.



Ha a 2. ajtót választja, 1 óra séta után visszajut a terembe. Azután a kijutáshoz szükséges idő eloszlása ugyanolyan, mint eredetileg, továbbá eltöltött 1 órát, így

$$\mathbb{E}(X|B_2) = \mathbb{E}(X) + 1.$$

3. feladat

Hasonlóan a többi ajtóra

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X|B_1) = 2, \\
&\mathbb{E}(X|B_2) = \mathbb{E}(X|B_3) = \mathbb{E}(X) + 1, \\
&\mathbb{E}(X|B_4) = \mathbb{E}(X|B_5) = \mathbb{E}(X) + 3.
\end{aligned}
$$

3. feladat

Hasonlóan a többi ajtóra

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|B_1) &= 2,\\
\mathbb{E}(X|B_2) &= \mathbb{E}(X|B_3) = \mathbb{E}(X) + 1,\\
\mathbb{E}(X|B_4) &= \mathbb{E}(X|B_5) = \mathbb{E}(X) + 3.
\end{aligned}$$

Innen teljes várható érték tétel révén

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{E}(X|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\
&\quad \mathbb{E}(X|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{E}(X|B_4)\mathbb{P}(B_4) + \mathbb{E}(X|B_5)\mathbb{P}(B_5) = \\
&2 \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 1) \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 1) \cdot \frac{1}{5} + \\
&\quad (\mathbb{E}(X) + 3) \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 3) \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\mathbb{E}(X) + 2,
\end{aligned}$$

3. feladat

Hasonlóan a többi ajtóra

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X|B_1) &= 2,\\
\mathbb{E}(X|B_2) &= \mathbb{E}(X|B_3) = \mathbb{E}(X) + 1,\\
\mathbb{E}(X|B_4) &= \mathbb{E}(X|B_5) = \mathbb{E}(X) + 3.
\end{aligned}$$

Innen teljes várható érték tétel révén

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{E}(X|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \\
&\quad \mathbb{E}(X|B_3)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{E}(X|B_4)\mathbb{P}(B_4) + \mathbb{E}(X|B_5)\mathbb{P}(B_5) = \\
&2 \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 1) \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 1) \cdot \frac{1}{5} + \\
&\quad (\mathbb{E}(X) + 3) \cdot \frac{1}{5} + (\mathbb{E}(X) + 3) \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\mathbb{E}(X) + 2,
\end{aligned}$$

aminek a megoldása $\mathbb{E}(X) = 10$.

6. feladat

Florida partjainál évente átlagosan 2.3 cápatámadás történik. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb 1 támadás történik?

6. feladat

Florida partjainál évente átlagosan 2.3 cápatámadás történik. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb 1 támadás történik? Megoldás. Jelölje X a cápatámadások számát az adott évben. A kérdés $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

6. feladat

Florida partjainál évente átlagosan 2.3 cápatámadás történik. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb 1 támadás történik? Megoldás. Jelölje X a cápatámadások számát az adott évben. A kérdés $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

X eloszlása $X \sim \mathrm{POI}(2.3)$, tehát

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \underbrace{\frac{2.3^0}{0!}}_{=1} e^{-2.3} + \frac{2.3^1}{1!} e^{-2.3} \approx 0.331.$$

7. feladat

Egy 500 oldalas könyv 1000 sajtóhubát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legalább 2 sajtóhiba van? (Feltesszük, hogy minden hiba bármelyik oldalra egyforma valószínűséggel esik.)

7. feladat

Egy 500 oldalas könyv 1000 sajtóhubát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legalább 2 sajtóhiba van? (Feltesszük, hogy minden hiba bármelyik oldalra egyforma valószínűséggel esik.)

Megoldás. Legyen X a hibák száma az adott oldalon. Mivel a könyv 500 oldalas, ezért minden egyes hiba $1/500$ eséllyel esik pont az adott oldalra. Összesen 1000 hiba van, és mindegyik $1/500$ eséllyel esik az adott oldalra, ezért X eloszlása $X \sim \mathrm{BIN}(1000, 1/500)$, és

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) =$$

$$1 - \binom{1000}{0}\left(\frac{1}{500}\right)^0\left(\frac{499}{500}\right)^{1000} - \binom{1000}{1}\left(\frac{1}{500}\right)^1\left(\frac{499}{500}\right)^{999}.$$

Másrészt ha 500 hiba van 1000 oldalon, akkor oldalanként átlagosan 2 hiba van.

7. feladat

Másrészt ha 500 hiba van 1000 oldalon, akkor oldalanként átlagosan 2 hiba van. Ha viszont oldalanként átlagosan 2 hiba van, akkor az egy oldalra eső hibák száma $Y \sim \mathrm{POI}(2)$ eloszlású, és

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) =$$
$$1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2}.$$

Most akkor melyik a helyes válasz?

7. feladat

Másrészt ha 500 hiba van 1000 oldalon, akkor oldalanként átlagosan 2 hiba van. Ha viszont oldalanként átlagosan 2 hiba van, akkor az egy oldalra eső hibák száma $Y \sim \mathrm{POI}(2)$ eloszlású, és

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) =$$
$$1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2}.$$

Most akkor melyik a helyes válasz?

Számítsuk ki őket numerikusan:

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \approx 0.594265,$$
$$\mathbb{P}(Y \geq 2) \approx 0.593994.$$

Ez általános tételként is kimondható.

Theorem

Ha $n \to \infty$ *és* $p_n \to 0$ *úgy, hogy* $np_n \to \lambda > 0$*, és* $X_n \sim BIN(n, p_n)$ *és* $Y \sim POI(\lambda)$*, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k), \qquad \forall k \geq 0$$

(Úgy is mondjuk, hogy X_n eloszlásban konvergál Y-hoz, vagy $X_n \xrightarrow{d} Y$.)

9. feladat

Egy sportversenyen a résztvevőknek egy labdát kell minél messzebbre dobniuk. Jelölje X Zsuzsa egy dobásának nagyságát. X sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{75}{x^2} & 30 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Zsuzsa 45 méternél messzebb dob.

(b) Számítsuk ki X eloszlásfüggvényét.

(c) Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$ értékét.

(d) Minden versenyző 3-szor dobhat, és a három dobás közül a legnagyobb lesz a pontszáma. Adjuk meg Zsuzsa pontszámának eloszlását. (Azt feltesszük, hogy az egyes dobások függetlenek.)

Megoldás.

(a)

$$\mathbb{P}(X > 45) = \int_{45}^{50} \frac{75}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{75}{x} \right]_{x=45}^{50} = \frac{75}{45} - \frac{75}{50} = \frac{1}{6}.$$

9. feladat

Megoldás.

(a)

$$\mathbb{P}(X > 45) = \int_{45}^{50} \frac{75}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{75}{x} \right]_{x=45}^{50} = \frac{75}{45} - \frac{75}{50} = \frac{1}{6}.$$

(b)

$$\int_{30}^{x} \frac{75}{y^2} \mathrm{d}y = \frac{75}{30} - \frac{75}{x},$$

Megoldás.

(a)

$$\mathbb{P}(X > 45) = \int_{45}^{50} \frac{75}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{75}{x}\right]_{x=45}^{50} = \frac{75}{45} - \frac{75}{50} = \frac{1}{6}.$$

(b)

$$\int_{30}^{x} \frac{75}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{75}{30} - \frac{75}{x},$$

és így

$$\mathbb{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & x \leq 30 \\ \frac{75}{30} - \frac{75}{x} & 30 < x \leq 50 \\ 1 & x > 50. \end{cases}$$

9. feladat

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{30}^{50} x \cdot \frac{75}{x^2}\mathrm{d}x = \left[75 \log(x)\right]_{x=30}^{50} = 75 \log(50) - 75 \log(30) \approx 38.1.$$

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{30}^{50} x \cdot \frac{75}{x^2}\mathrm{d}x =$$
$$[75\log(x)]_{x=30}^{50} = 75\log(50) - 75\log(30) \approx 38.1.$$

(d) Jelölje X_1, X_2, X_3 a három dobás eredményét, és a pontszám akkor

$$Y = \max(X_1, X_2, X_3).$$

9. feladat

(c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\mathrm{d}x = \int_{30}^{50} x \cdot \frac{75}{x^2}\mathrm{d}x =$$
$$[75\log(x)]_{x=30}^{50} = 75\log(50) - 75\log(30) \approx 38.1.$$

(d) Jelölje X_1, X_2, X_3 a három dobás eredményét, és a pontszám akkor

$$Y = \max(X_1, X_2, X_3).$$

Y eloszlásfüggvényét akarjuk kiszámítani:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y < x).$$

9. feladat

$\mathbb{P}(Y < x)$ kiszámításához először vegyük észre, hogy

$$\{Y < x\} = \{\max(X_1, X_2, X_3) < x\} = \{X_1 < x, X_2 < x, X_3 < x\}.$$

$\mathbb{P}(Y < x)$ kiszámításához először vegyük észre, hogy

$$\{Y < x\} = \{\max(X_1, X_2, X_3) < x\} = \{X_1 < x, X_2 < x, X_3 < x\}.$$

De X_1, X_2 és X_3 függetlenek, így

$$\mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, X_3 < x) = \mathbb{P}(X_1 < x)\mathbb{P}(X_2 < x)\mathbb{P}(X_3 < x) =$$

$$(\mathbb{P}(X < x))^3 = \begin{cases} 0 & x \leq 30 \\ \left(\frac{75}{30} - \frac{75}{x}\right)^3 & 30 < x \leq 50 \\ 1 & x > 50. \end{cases}$$

10. feladat

Egy villanykörte X élettartamának eloszlása exponenciális úgy, hogy $\mathbb{P}(X > 10) = 0.8$ teljesül (az időegység 100 óra). Számítsuk ki az eloszlás paraméterét és X várható értékét.

10. feladat

Egy villanykörte X élettartamának eloszlása exponenciális úgy, hogy $\mathbb{P}(X > 10) = 0.8$ teljesül (az időegység 100 óra). Számítsuk ki az eloszlás paraméterét és X várható értékét.

Megoldás. Legyen λ az exponenciális eloszlás paramétere. Ekkor az eloszlásfüggvény

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

és

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = 1 - F(10) = e^{-10\lambda} = 0.8,$$

ahonnan $\lambda = -\log(0.8)/10 \approx 0.0223$, és

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \approx 44.8 \quad \text{(100 órában mérve)}.$$

12. feladat

Egy 120 fős középiskolai évfolyam biológia és matematika jegyei a következőképpen alakultak:

$B \backslash M$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	4
2	2	4	4	8	2
3	4	8	8	12	8
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4

Kiválasztunk egy tanulót az évfolyamból találomra; legyen a matematika jegye X, a biológia jegye Y.

(a) $\mathbb{P}$(a tanuló megbukott legalább az egyik tárgyból) $=?$

(b) $\mathbb{E}(X) =?$

(c) $\mathbb{E}(X|Y \geq 4) =?$

(d) X és Y függetlenek-e?

(e) $\mathrm{Cov}(X, Y) =?$

Megoldás.

(a) Összesen 21 diák bukott meg legalább az egyik tárgyból (pirossal jelölve a táblázatban), tehát

$$\mathbb{P}(\text{a tanuló legalább az egyik tárgyból megbukott}) = \frac{21}{120}.$$

$B \backslash M$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	4
2	2	4	4	8	2
3	4	8	8	12	8
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4

(b) X peremeloszlását kell kiszámítanunk.

$B \setminus M$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	4
2	2	4	4	8	2
3	4	8	8	12	8
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4
	12	24	24	36	24

Ez alapján X peremeloszlása

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{12}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{24}{120}$

és $\mathbb{E}(X) = \frac{12}{120} \cdot 1 + \frac{24}{120} \cdot 2 + \frac{36}{120} \cdot 3 + \frac{24}{120} \cdot 4 + \frac{24}{120} \cdot 5 = 3.2.$

(c) Kiszámítjuk X feltételes eloszlását az $Y \geq 4$ feltétel mellett. Először is $\mathbb{P}(Y \geq 4) = \frac{50}{120}$.

$B \backslash M$	1	2	3	4	5
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4
	5	10	10	15	10

(c) Kiszámítjuk X feltételes eloszlását az $Y \geq 4$ feltétel mellett. Először is $\mathbb{P}(Y \geq 4) = \frac{50}{120}$.

$B \setminus M$	1	2	3	4	5
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4
	5	10	10	15	10

X feltételes eloszlása az $Y \geq 4$ feltétel mellett

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k \mid Y \geq 4)$	$\frac{5}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{10}{50}$

és $\mathbb{E}(X \mid Y \geq 4) = \frac{5}{50} \cdot 1 + \frac{10}{50} \cdot 2 + \frac{10}{50} \cdot 3 + \frac{15}{50} \cdot 4 + \frac{10}{50} \cdot 5 = 3.2.$

12. feladat

(d) X és Y nem függetlenek, például

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 5) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 5) = \frac{12}{120} \cdot \frac{20}{120}.$$

(d) X és Y nem függetlenek, például

$$\mathbb{P}(X=1, Y=5) = 0 \neq \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=5) = \frac{12}{120}\cdot\frac{20}{120}.$$

(e)

$$\mathbb{E}(X) = 3.2,$$
$$\mathbb{E}(Y) = 3.25,$$
$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{120}\cdot 1\cdot 1 + \frac{2}{120}\cdot 1\cdot 2 + \cdots + \frac{4}{120}\cdot 5\cdot 5 = 10.4,$$

ahonnan

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0,$$

annak ellenére, hogy X és Y nem függetlenek.

12. feladat

(d) X és Y nem függetlenek, például

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 5) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 5) = \frac{12}{120} \cdot \frac{20}{120}.$$

(e)

$$\mathbb{E}(X) = 3.2,$$
$$\mathbb{E}(Y) = 3.25,$$
$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{120} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{120} \cdot 1 \cdot 2 + \cdots + \frac{4}{120} \cdot 5 \cdot 5 = 10.4,$$

ahonnan

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0,$$

annak ellenére, hogy X és Y nem függetlenek.
Bónusz kérdés: hogyan készült a táblázat?