Valószínűségi generátorfüggvény

Sztochasztika

Horváth Illés

2022/10/28

Definíció

Egy X diszkrét valószínűségi változó valószínűségi generátorfüggvénye (vagy röviden generátorfüggvénye)

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k).$$

Definíció

Egy X diszkrét valószínűségi változó valószínűségi generátorfüggvénye (vagy röviden generátorfüggvénye)

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k).$$

Példa. Ha X a dobás értéke egy szabályos hatoldalú dobókockával, akkor

$$G(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6.$$

Definíció

Egy X diszkrét valószínűségi változó valószínűségi generátorfüggvénye (vagy röviden generátorfüggvénye)

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k).$$

Példa. Ha X a dobás értéke egy szabályos hatoldalú dobókockával, akkor

$$G(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6.$$

Példa. $X \sim PGEO(p)$ generátorfüggvénye

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = p\sum_{k=0}^{\infty}((1-p)z)^k = \frac{p}{1-(1-p)z}.$$

Tulajdonságok

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) =$$

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) =$$

Tulajdonságok

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

Tulajdonságok

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

- $$G(0) =$$

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

- $$G(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(X = k) =$$

Tulajdonságok

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$

- $$G(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)$$

  (mivel $0^0 = 1$),

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1)=\sum_{k=0}^{\infty}1^k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)=1,$$
- $$G(0)=\sum_{k=0}^{\infty}0^k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=0)$$
  (mivel $0^0=1$),
- a sorösszeg konvergens $z\in[0,1]$-re,

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$
- $$G(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)$$
  (mivel $0^0 = 1$),
- a sorösszeg konvergens $z \in [0, 1]$-re,
- $G(z)$ analitikus $[0, 1)$-en és folytonos $[0, 1]$-en;

Tulajdonságok

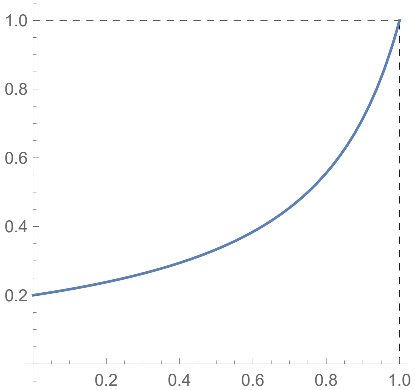
A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:

- $$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$
- $$G(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)$$
  (mivel $0^0 = 1$),
- a sorösszeg konvergens $z \in [0, 1]$-re,
- $G(z)$ analitikus $[0, 1)$-en és folytonos $[0, 1]$-en;
- $G(z)$ növő és konvex $[0, 1]$-en.

Példa

Példa. PGEO(1/5) generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1/5}{1-(1-1/5)z} = \frac{1}{5-4z}.$$



Várható érték és szórás

Lemma

- $\mathbb{E}(X) = G'(1)$,
- $\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$.

Várható érték és szórás

Lemma

- $\mathbb{E}(X) = G'(1)$,
- $\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$.

Bizonyítás.

$$G'(z)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)'\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X).$$

Várható érték és szórás

Lemma

- $\mathbb{E}(X) = G'(1)$,
- $\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$.

Bizonyítás.

$$G'(z)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty}(z^k)'\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1}\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\mathbb{P}(X = k)\Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X).$$

$$
\begin{aligned}
G''(z)\Big|_{z=1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(z^k)''\mathbb{P}(X=k)\Big|_{z=1} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}\mathbb{P}(X=k)\Big|_{z=1} = \\
&\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}\mathbb{P}(X=k)\Big|_{z=1} = \\
&\sum_{k=2}^{\infty}(k^2-k)\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X),
\end{aligned}
$$

ahonnan

$$
G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2 = \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)-(\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{D}^2(X).
$$

Az eredeti eloszlás kiszámítható a generátorfüggvényből.

Lemma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(z)\big|_{z=0}}{k!},$$

ahol $G^{(k)}$ a k-adik deriváltat jelöli.

Az eredeti eloszlás kiszámítható a generátorfüggvényből.

Lemma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(z)\big|_{z=0}}{k!},$$

ahol $G^{(k)}$ a k-adik deriváltat jelöli.

Bizonyítás.

$$G^{(k)}(z)\big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)n(n-1)\cdots(n-k+1)z^k\big|_{z=0} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k}\big|_{z=0} =$$

$$\mathbb{P}(X = k)k(k-1)\cdots(k-k+1)z^{k-k}\big|_{z=0} = \mathbb{P}(X = k)k!$$

Konkrétan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= G(0),\\
\mathbb{P}(X=1) &= G'(0),\\
\mathbb{P}(X=2) &= \frac{G''(0)}{2}\\
\mathbb{P}(X=3) &= \frac{G'''(0)}{6}\\
&\text{stb.}
\end{aligned}$$

Két független valószínűségi változó összege

Tétel

Legyen X *és* Y *két független nemnegatív valószínűségi változó, generátorfüggvényeik* $G_X(z)$ *és* $G_Y(z)$*. Ekkor*

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Két független valószínűségi változó összege

Tétel

Legyen X és Y két független nemnegatív valószínűségi változó, generátorfüggvényeik $G_X(z)$ és $G_Y(z)$. Ekkor

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Bizonyítás (vázlat, példán keresztül). Legyen X és Y két szabályos 6-oldalú kockadobás eredménye. Számítsuk ki $\mathbb{P}(X+Y=4)$-et.

$$\mathbb{P}(X+Y=4) =$$
$$\mathbb{P}(X=1, Y=3) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=3, Y=1) =$$
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{36}.$$

Másrészt számítsuk ki z^4 együtthatóját $G_X(z)G_Y(z)$-ben:

$$G_X(z)G_Y(z) = \left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6\right)\left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6\right).$$

z^4-t kaphatunk úgy, hogy z^1-t vesszük az első zárójelből és z^3 a második zárójelből, vagy $z^2 \cdot z^2$-t, vagy $z^3 \cdot z^1$-t. Ezek alapján z^4 együtthatója

$$\frac{1}{6}z^1 \cdot \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^2 \cdot \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \cdot \frac{1}{6}z^1 = \frac{3}{36}z^4.$$

Két független valószínűségi változó összege

Másrészt számítsuk ki z^4 együtthatóját $G_X(z)G_Y(z)$-ben:

$$G_X(z)G_Y(z) = \left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6\right)\left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6\right).$$

z^4-t kaphatunk úgy, hogy z^1-t vesszük az első zárójelből és z^3 a második zárójelből, vagy $z^2 \cdot z^2$-t, vagy $z^3 \cdot z^1$-t. Ezek alapján z^4 együtthatója

$$\frac{1}{6}z^1 \cdot \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^2 \cdot \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \cdot \frac{1}{6}z^1 = \frac{3}{36}z^4.$$

Tulajdonképpen a polinomszorzás pont azt számítja ki, amire szükségünk van.

Két független valószínűségi változó összege

Másrészt számítsuk ki z^4 együtthatóját $G_X(z)G_Y(z)$-ben:

$$G_X(z)G_Y(z) = \left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6\right)\left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6\right).$$

z^4-t kaphatunk úgy, hogy z^1-t vesszük az első zárójelből és z^3 a második zárójelből, vagy $z^2 \cdot z^2$-t, vagy $z^3 \cdot z^1$-t. Ezek alapján z^4 együtthatója

$$\frac{1}{6}z^1 \cdot \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^2 \cdot \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \cdot \frac{1}{6}z^1 = \frac{3}{36}z^4.$$

Tulajdonképpen a polinomszorzás pont azt számítja ki, amire szükségünk van.

Teljes valószínűség tétellel formálissá és általánossá is tehető a fenti számolás.

Független valószínűségi változók összege

A tétel értelemszerűen általánosítható több független valószínűségi változó összegére is; ha pl. X, Y, Z generátorfüggvénye rendre G_X, G_Y, G_Z, akkor

$$G_{X+Y+Z} = G_X(z)G_Y(z)G_Z(z)$$

stb.

Független valószínűségi változók összege

A tétel értelemszerűen általánosítható több független valószínűségi változó összegére is; ha pl. X, Y, Z generátorfüggvénye rendre G_X, G_Y, G_Z, akkor

$$G_{X+Y+Z} = G_X(z)G_Y(z)G_Z(z)$$

stb.

Ha $X_1, \dots, X_k$ független, azonos eloszlásúak (röviden fae) közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor $Y = X_1 + \cdots + X_k$ generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = (G_X(z))^k.$$

Független valószínűségi változók összege

A tétel értelemszerűen általánosítható több független valószínűségi változó összegére is; ha pl. X, Y, Z generátorfüggvénye rendre G_X, G_Y, G_Z, akkor

$$G_{X+Y+Z} = G_X(z)G_Y(z)G_Z(z)$$

stb.

Ha $X_1, \ldots, X_k$ független, azonos eloszlásúak (röviden fae) közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor $Y = X_1 + \cdots + X_k$ generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = (G_X(z))^k.$$

Független valószínűségi változók összegét hívják konvolúciónak is (az eloszlásokra vagy sűrűségfüggvényekre ekvivalens a függvények konvolúciójával). A generátorfüggvény a konvolúciót szorzattá transzformálja (hasonlóan mint a Fourier- vagy Laplace-transzformált).

Determinisztikus számok

Determinisztikus számok is tekinthetőek valószínűségi változónak: a k szám értéke 1 valószínűséggel k, és így a generátorfüggvénye z^k.

Determinisztikus számok is tekinthetőek valószínűségi változónak: a k szám értéke 1 valószínűséggel k, és így a generátorfüggvénye z^k.

Ennek következményeként ha X generátorfüggvénye $G(z)$, akkor $X+1$ generátorfüggvénye

$$G_{X+1}(z) = zG_X(z).$$

Determinisztikus számok is tekinthetőek valószínűségi változónak: a k szám értéke 1 valószínűséggel k, és így a generátorfüggvénye z^k.

Ennek következményeként ha X generátorfüggvénye $G(z)$, akkor $X+1$ generátorfüggvénye

$$G_{X+1}(z) = zG_X(z).$$

Vajon mi $2X$ generátorfüggvénye?

Determinisztikus számok

Determinisztikus számok is tekinthetőek valószínűségi változónak: a k szám értéke 1 valószínűséggel k, és így a generátorfüggvénye z^k.

Ennek következményeként ha X generátorfüggvénye $G(z)$, akkor $X+1$ generátorfüggvénye

$$G_{X+1}(z) = zG_X(z).$$

Vajon mi $2X$ generátorfüggvénye? $G(z^2)$ (gondoljuk meg).

Legyen $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$. Számítsuk ki a $G(z)$ generátorfüggvényét.

Példa - binomiális eloszlás

Legyen $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$. Számítsuk ki a $G(z)$ generátorfüggvényét.

X a sikeres próbák száma n független próbából, tehát ha minden sikeres próbára 1-et számolunk, minden sikertelenre pedig 0-t, akkor X felírható úgy, mint

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

ahol $Y_1, \ldots, Y_n$ független azonos Bernoulli változók közös $G_Y(z) = (1 - p) + pz$ generátorfüggvénnyel.

Példa - binomiális eloszlás

Legyen $X \sim \mathrm{BIN}(n, p)$. Számítsuk ki a $G(z)$ generátorfüggvényét.

X a sikeres próbák száma n független próbából, tehát ha minden sikeres próbára 1-et számolunk, minden sikertelenre pedig 0-t, akkor X felírható úgy, mint

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

ahol $Y_1, \ldots, Y_n$ független azonos Bernoulli változók közös $G_Y(z) = (1-p) + pz$ generátorfüggvénnyel. Tehát

$$G(z) = ((1-p) + pz)^n.$$

Másrészt $G(z)$ kiszámítható X eloszlásából közvetlenül is:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k.$$

Példa - binomiális eloszlás

Másrészt $G(z)$ kiszámítható X eloszlásából közvetlenül is:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k.$$

A binomiális tétel alapján a két képlet ekvivalens.

$$G(z) = ((1-p) + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Mivel $G(z) = \mathbb{E}(z^X)$, ezért a generátorfüggvényre alkalmazható a teljes várható érték tétel.

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Mivel $G(z) = \mathbb{E}(z^X)$, ezért a generátorfüggvényre alkalmazható a teljes várható érték tétel.

Példa. Egy szabályos hatoldalú kockával dobálunk. Legyen X az, hogy hányadik dobásra jön ki az első 6-os. Számítsuk ki X generátorfüggvényét.

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Mivel $G(z) = \mathbb{E}(z^X)$, ezért a generátorfüggvényre alkalmazható a teljes várható érték tétel.

Példa. Egy szabályos hatoldalú kockával dobálunk. Legyen X az, hogy hányadik dobásra jön ki az első 6-os. Számítsuk ki X generátorfüggvényét.

Számítsuk ki $\mathbb{E}(z^X)$ értékét aszerint felbontva, hogy mi az első dobás értéke! Ha az első dobás 6-os, egyből készen is vagyunk, $X = 1$, tehát

$$\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás 6-os}) = \mathbb{E}(z^1) = z.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Mivel $G(z) = \mathbb{E}(z^X)$, ezért a generátorfüggvényre alkalmazható a teljes várható érték tétel.

Példa. Egy szabályos hatoldalú kockával dobálunk. Legyen X az, hogy hányadik dobásra jön ki az első 6-os. Számítsuk ki X generátorfüggvényét.

Számítsuk ki $\mathbb{E}(z^X)$ értékét aszerint felbontva, hogy mi az első dobás értéke! Ha az első dobás 6-os, egyből készen is vagyunk, $X = 1$, tehát

$$\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás 6-os}) = \mathbb{E}(z^1) = z.$$

Ha az első dobás nem 6-os, akkor dobtunk egyet, de utána ugyanolyan helyzetben vagyunk, mint eredetileg, tehát a hátralévő dobások számának eloszlása megegyezik X eloszlásával, ahonnan

$$\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás nem 6-os}) = \mathbb{E}(z^{X+1}) = zG(z).$$

Innen a teljes várható érték tétel alapján

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) =$$
$$\mathbb{E}(z^X|\text{első dobás 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás 6-os})$$
$$+\mathbb{E}(z^X|\text{első dobás nem 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás nem 6-os})$$
$$= \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zG(z).$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Innen a teljes várható érték tétel alapján

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) =$$
$$\mathbb{E}(z^X|\text{első dobás 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás 6-os})$$
$$+\mathbb{E}(z^X|\text{első dobás nem 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás nem 6-os})$$
$$= \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zG(z).$$

Ez egy lineáris egyenlet $G(z)$-re, aminek megoldása

$$G(z) = \frac{z}{6-5z}.$$

Innen a teljes várható érték tétel alapján

$$\begin{aligned} G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \\ &\mathbb{E}(z^X|\text{első dobás 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás 6-os}) \\ &+ \mathbb{E}(z^X|\text{első dobás nem 6-os})\mathbb{P}(\text{első dobás nem 6-os}) \\ = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zG(z). \end{aligned}$$

Ez egy lineáris egyenlet $G(z)$-re, aminek megoldása

$$G(z) = \frac{z}{6-5z}.$$

Egyébként ezt onnan is le lehet vezetni, hogy $X \sim \mathrm{GEO}(1/6)$:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} z^k = \frac{z}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5z}{6}\right)^{k-1} = \frac{z}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5z}{6}} = \frac{z}{6-5z}.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Legyen Y az, hogy hányadikra jön ki először két *egymást követő* 6-os! Azaz például a 6516342661...sorozatra $Y = 9$. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét. Mennyi Y várható értéke?

Legyen Y az, hogy hányadikra jön ki először két *egymást követő* 6-os! Azaz például a 6516342661...sorozatra $Y = 9$. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét. Mennyi Y várható értéke?

Y felírható úgy, mint

$$Y = X_1 + X_2,$$

ahol X_1 az első 6-osig szükséges dobások száma és X_2 az első 6-os után szükséges dobások száma.

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Legyen Y az, hogy hányadikra jön ki először két *egymást követő* 6-os! Azaz például a 6516342661...sorozatra $Y = 9$. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét. Mennyi Y várható értéke?

Y felírható úgy, mint

$$Y = X_1 + X_2,$$

ahol X_1 az első 6-osig szükséges dobások száma és X_2 az első 6-os után szükséges dobások száma.

X_1 generátorfüggvénye

$$\frac{z}{6-5z}$$

az előzőek alapján. (Figyelem, X_2 generátorfüggvénye viszont más!)

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Legyen Y az, hogy hányadikra jön ki először két *egymást követő* 6-os! Azaz például a 6516342661...sorozatra $Y = 9$. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét. Mennyi Y várható értéke?

Y felírható úgy, mint

$$Y = X_1 + X_2,$$

ahol X_1 az első 6-osig szükséges dobások száma és X_2 az első 6-os után szükséges dobások száma.

X_1 generátorfüggvénye

$$\frac{z}{6 - 5z}$$

az előzőek alapján. (Figyelem, X_2 generátorfüggvénye viszont más!)

X_1 és X_2 függetlenek.

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Használjunk teljes várható érték tételt aszerint, hogy az első 6-os dobást követő dobás eredménye 6-os vagy nem.

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Használjunk teljes várható érték tételt aszerint, hogy az első 6-os dobást követő dobás eredménye 6-os vagy nem.

Ha 6-os, akkor készen vagyunk, és

$$\mathbb{E}(z^Y | \text{6-os}) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}) = z \cdot \frac{z}{6-5z}.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Használjunk teljes várható érték tételt aszerint, hogy az első 6-os dobást követő dobás eredménye 6-os vagy nem.

Ha 6-os, akkor készen vagyunk, és

$$\mathbb{E}(z^Y|\text{6-os}) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}) = z \cdot \frac{z}{6-5z}.$$

Ha nem 6-os, akkor viszont mindent kezdhetünk elölről (plusz már volt $X_1 + 1$ dobásunk):

$$\mathbb{E}(z^Y|\text{nem 6-os}) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}) \cdot \mathbb{E}(z^Y) = z \cdot \frac{z}{6-5z} G_Y(z).$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Használjunk teljes várható érték tételt aszerint, hogy az első 6-os dobást követő dobás eredménye 6-os vagy nem.

Ha 6-os, akkor készen vagyunk, és

$$\mathbb{E}(z^Y|\text{6-os}) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}) = z \cdot \frac{z}{6-5z}.$$

Ha nem 6-os, akkor viszont mindent kezdhetünk elölről (plusz már volt $X_1 + 1$ dobásunk):

$$\mathbb{E}(z^Y|\text{nem 6-os}) = \mathbb{E}(z^{X_1+1}) \cdot \mathbb{E}(z^Y) = z \cdot \frac{z}{6-5z} G_Y(z).$$

Teljes várható érték tétel alapján

$$G_Y(z) = \frac{1}{6} \cdot z \cdot \frac{z}{6-5z} + \frac{5}{6} z \cdot \frac{z}{6-5z} G_Y(z).$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Ez egy lineáris egyenlet $G_Y(z)$-re, a megoldása

$$G_Y(z) = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Ez egy lineáris egyenlet $G_Y(z)$-re, a megoldása

$$G_Y(z) = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

(Gyors ellenőrzés: $G_Y(1) = 1$ teljesül. Egyébként a z^2-es szorzó szerepe a számlálóban onnan is világos, hogy két egymást követő 6-os dobáshoz minimum két dobás kell, tehát a generátorfüggvényben z^2 a legkisebb nemnulla együtthatójú tag.)

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Ez egy lineáris egyenlet $G_Y(z)$-re, a megoldása

$$G_Y(z) = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

(Gyors ellenőrzés: $G_Y(1) = 1$ teljesül. Egyébként a z^2-es szorzó szerepe a számlálóban onnan is világos, hogy két egymást követő 6-os dobáshoz minimum két dobás kell, tehát a generátorfüggvényben z^2 a legkisebb nemnulla együtthatójú tag.)

Végül innen

$$\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = 42.$$

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel. Legyen

$$Y = X_1 + \cdots + X_N,$$

vagyis Y egy véletlen tagszámú összeg. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét.

Véletlen tagszámú összeg

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel. Legyen

$$Y = X_1 + \cdots + X_N,$$

vagyis Y egy véletlen tagszámú összeg. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét.

Példa. Van egy piros és egy kék dobókockánk (mindkettő 6 oldalú és szabályos). Dobunk a kékkel, majd dobunk a pirossal annyiszor, amennyi a kéken kijött, és összeadjuk a piros dobások értékét. Mik a lehetséges értékei a piros dobások összegének?

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \dots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \dots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk N értéke szerint.

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \dots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk N értéke szerint.

Ha $N = 1$, akkor $Y = X_1$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 1) = \frac{1}{6}z^1 + \cdots + \frac{1}{6}z^6$.

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \ldots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk N értéke szerint.

Ha $N = 1$, akkor $Y = X_1$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 1) = \frac{1}{6}z^1 + \cdots + \frac{1}{6}z^6$.

Ha $N = 2$, akkor $Y = X_1 + X_2$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 2) = (G_X(z))^2$.

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \ldots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk N értéke szerint.

Ha $N = 1$, akkor $Y = X_1$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 1) = \frac{1}{6} z^1 + \cdots + \frac{1}{6} z^6$.

Ha $N = 2$, akkor $Y = X_1 + X_2$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 2) = (G_X(z))^2$.

Ha $N = 3$, akkor $Y = X_1 + X_2 + X_3$, és Y generátorfüggvénye $\mathbb{E}(z^Y | N = 3) = (G_X(z))^3$ stb.

Véletlen tagszámú összeg

Összességében

$$G_Y(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{E}(z^Y | N = n)\mathbb{P}(N = n) =$$

$$\frac{1}{6} G_X(z) + \frac{1}{6}(G_X(z))^2 + \cdots + \frac{1}{6}(G_X(z))^6.$$

Összességében

$$G_Y(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{E}(z^Y | N = n)\mathbb{P}(N = n) =$$

$$\frac{1}{6} G_X(z) + \frac{1}{6}(G_X(z))^2 + \cdots + \frac{1}{6}(G_X(z))^6.$$

Tétel

Ha $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ eloszlásfüggvénnyel, és N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = G_N(G_X(z)).$$

Példák

Valakinek az unokáinak száma véletlen tagszámú összeg: a gyermekeinek száma is véletlen, majd azok mindegyikének a gyermekeinek száma is véletlen.

Példák

Valakinek az unokáinak száma véletlen tagszámú összeg: a gyermekeinek száma is véletlen, majd azok mindegyikének a gyermekeinek száma is véletlen.

Egy liftben utazó emberek összsúlya is véletlen tagszámú összeg.

Példák

Valakinek az unokáinak száma véletlen tagszámú összeg: a gyermekeinek száma is véletlen, majd azok mindegyikének a gyermekeinek száma is véletlen.

Egy liftben utazó emberek összsúlya is véletlen tagszámú összeg.

Egy bolt napi bevétele is véletlen tagszámú összeg. Hasonlóan egy bankautomatából egy nap alatt kivett pénz mennyisége is az.

Összefoglalás

A generátorfüggvény egy számolási eszköz, amivel bizonyos típusú kérdések könnyen számolhatóvá válnak. A fő erényei a konvolúció és a véletlen tagszámú összeg kezelése, valamint az, hogy a teljes várható érték érvényes rá.

Összefoglalás

A generátorfüggvény egy számolási eszköz, amivel bizonyos típusú kérdések könnyen számolhatóvá válnak. A fő erényei a konvolúció és a véletlen tagszámú összeg kezelése, valamint az, hogy a teljes várható érték érvényes rá.

Olyan problémákra használható, ahol a vizsgált véletlen mennyiségek alapvetően diszkrétek.

Összefoglalás

A generátorfüggvény egy számolási eszköz, amivel bizonyos típusú kérdések könnyen számolhatóvá válnak. A fő erényei a konvolúció és a véletlen tagszámú összeg kezelése, valamint az, hogy a teljes várható érték érvényes rá.

Olyan problémákra használható, ahol a vizsgált véletlen mennyiségek alapvetően diszkrétek.

A gyakorlatban a transzformált tartományban elvégzett számítások végén vagy visszatranszformáljuk az eredményt (analitikusan, ha lehet, vagy numerikusan), vagy magából a generátorfüggvényből vonunk le következtetéseket (pl. várható érték, szórás).

Tulajdonságok

$$G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k.$$

$$G(1) = 1, \quad G(0) = \mathbb{P}(X = 0), \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = G'(1), \mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$$

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z) \quad X, Y \text{ függetlenre}$$

$$G_{X_1+\cdots+X_N}(z) = G_N(G_X(z)) \quad X_1, X_2, \ldots \text{ fae és } N \text{ függetlenre}$$

teljes várható érték tétel alkalmazható $G(z)$-re

Hiányos generátorfüggvények

Néha olyan X valószínűségi változókkal dolgozunk, amelyek $+\infty$-t is felvehetnek pozitív valószínűséggel. Ilyenkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X = \infty) \leq 1.$$

Hiányos generátorfüggvények

Néha olyan X valószínűségi változókkal dolgozunk, amelyek $+\infty$-t is felvehetnek pozitív valószínűséggel. Ilyenkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X = \infty) \leq 1.$$

A generátorfüggvény definíciója ettől még értelmes:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k,$$

csak $G(1) = 1$ helyett ilyenkor

$$G(1) \leq 1,$$

és

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 - G(1).$$

Példa. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy érmét dobálnak; ha a dobás fej, Jenő fizet Bélának egy forintot, ha írás, akkor pedig Béla fizet Jenőnek egy forintot. Az érme azonban nem szabályos, a fej valószínűsége $2/3$, az írásé pedig $1/3$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jenő sohasem kerül nyerésbe?

Példa. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy érmét dobálnak; ha a dobás fej, Jenő fizet Bélának egy forintot, ha írás, akkor pedig Béla fizet Jenőnek egy forintot. Az érme azonban nem szabályos, a fej valószínűsége $2/3$, az írásé pedig $1/3$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jenő sohasem kerül nyerésbe?

Jelölje X azt, hogy hány kör után lesz először Jenő mérlege pozitív. Ha ez soha nem következik be, akkor $X = \infty$. Ki szeretnénk számítani X generátorfüggvényét, $G(z)$-t.

Példa. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy érmét dobálnak; ha a dobás fej, Jenő fizet Bélának egy forintot, ha írás, akkor pedig Béla fizet Jenőnek egy forintot. Az érme azonban nem szabályos, a fej valószínűsége 2/3, az írásé pedig 1/3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jenő sohasem kerül nyerésbe?

Jelölje X azt, hogy hány kör után lesz először Jenő mérlege pozitív. Ha ez soha nem következik be, akkor $X = \infty$. Ki szeretnénk számítani X generátorfüggvényét, $G(z)$-t.

Teljes várható érték tételt szeretnénk alkalmazni az első dobás értéke szerint. F a fej, I az írás.

Példa. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy érmét dobálnak; ha a dobás fej, Jenő fizet Bélának egy forintot, ha írás, akkor pedig Béla fizet Jenőnek egy forintot. Az érme azonban nem szabályos, a fej valószínűsége $2/3$, az írásé pedig $1/3$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jenő sohasem kerül nyerésbe?

Jelölje X azt, hogy hány kör után lesz először Jenő mérlege pozitív. Ha ez soha nem következik be, akkor $X = \infty$. Ki szeretnénk számítani X generátorfüggvényét, $G(z)$-t.

Teljes várható érték tételt szeretnénk alkalmazni az első dobás értéke szerint. F a fej, I az írás.

Ha az első dobás írás, akkor $X = 1$, és

$$\mathbb{E}(z^X | I) = z^1 = z.$$

Hiányos generátorfüggvények

Ha az első dobás fej, akkor Jenő mérlege -1-en áll. Innen még el kell jutnia először a 0-ra, majd az 1-re.

Ha az első dobás fej, akkor Jenő mérlege -1-en áll. Innen még el kell jutnia először a 0-ra, majd az 1-re.

A (-1)-ről 0-ra eljutáshoz szükséges lépésszám ugyanolyan eloszlású, mint eredetileg a 0-ról 1-re eljutás ideje.

Hiányos generátorfüggvények

Ha az első dobás fej, akkor Jenő mérlege -1-en áll. Innen még el kell jutnia először a 0-ra, majd az 1-re.

A (-1)-ről 0-ra eljutáshoz szükséges lépésszám ugyanolyan eloszlású, mint eredetileg a 0-ról 1-re eljutás ideje.

Utána a 0-ról 1-re eljutáshoz szükséges lépésszám szintén ugyanilyen eloszlású, és független a (-1)-ről 0-ra eljutáshoz szükséges lépésszámtól.

Ha az első dobás fej, akkor Jenő mérlege -1-en áll. Innen még el kell jutnia először a 0-ra, majd az 1-re.

A (-1)-ről 0-ra eljutáshoz szükséges lépésszám ugyanolyan eloszlású, mint eredetileg a 0-ról 1-re eljutás ideje.

Utána a 0-ról 1-re eljutáshoz szükséges lépésszám szintén ugyanilyen eloszlású, és független a (-1)-ről 0-ra eljutáshoz szükséges lépésszámtól. Ez alapján

$$\mathbb{E}(z^X|F) = z(G(z))^2,$$

és a teljes várható érték tétel szerint

$$\mathbb{E}(z^X) = G(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}z(G(z))^2.$$

Hiányos generátorfüggvények

Ez egy másodfokú egyenlet $\mathbb{E}(z^X) = G(z)$-re, melynek megoldásai

$$G(z) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Ez egy másodfokú egyenlet $\mathbb{E}(z^X) = G(z)$-re, melynek megoldásai

$$G(z) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Azt, hogy $+$ vagy $-$ van a valódi megoldásban, a $z = 0$ behelyettesítéssel tudjuk eldönteni. Mivel $G(0) = \mathbb{P}(X = 0)$, és 0 lépésben Jenő nem kerülhet nyerésbe, ezért $G(0) = 0$ kell teljesüljön.

Hiányos generátorfüggvények

Ez egy másodfokú egyenlet $\mathbb{E}(z^X) = G(z)$-re, melynek megoldásai

$$G(z) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Azt, hogy $+$ vagy $-$ van a valódi megoldásban, a $z = 0$ behelyettesítéssel tudjuk eldönteni. Mivel $G(0) = \mathbb{P}(X = 0)$, és 0 lépésben Jenő nem kerülhet nyerésbe, ezért $G(0) = 0$ kell teljesüljön.

A pluszos tag $z = 0$ esetén $\frac{\infty}{0}$ típusú, ami nem jó, $G(0) = 0$ nem teljesül.

Hiányos generátorfüggvények

Ez egy másodfokú egyenlet $\mathbb{E}(z^X) = G(z)$-re, melynek megoldásai

$$G(z) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Azt, hogy $+$ vagy $-$ van a valódi megoldásban, a $z = 0$ behelyettesítéssel tudjuk eldönteni. Mivel $G(0) = \mathbb{P}(X = 0)$, és 0 lépésben Jenő nem kerülhet nyerésbe, ezért $G(0) = 0$ kell teljesüljön.

A pluszos tag $z = 0$ esetén $\frac{\infty}{0}$ típusú, ami nem jó, $G(0) = 0$ nem teljesül.

A mínuszos tagba behelyettesítve $\frac{0}{0}$ alakú törtet kapunk; L'Hôpital szabály alapján $z \to 0$ esetén a limesz 0, tehát ez a valódi megoldás.

Hiányos generátorfüggvények

Tehát X generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3 - \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Tehát X generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3 - \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Az eredeti kérdésre a válasz pedig

$$\mathbb{P}(\text{Jenő sohasem kerül nyerésbe}) = \mathbb{P}(X = \infty) = 1 - G(1) = \frac{1}{2}.$$

1. feladat

Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$

Határozzuk meg az eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket).
Határozzuk meg X várható értékét és szórását is.

1. feladat

Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$

Határozzuk meg az eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket).
Határozzuk meg X várható értékét és szórását is.

Megoldás.

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{3}{8}, \qquad \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{8},$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{8}, \qquad \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{8},$$
$$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=5) = \cdots = 0.$$

1. feladat

$$G'(z) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}z + \frac{3}{8}z^2,$$
$$G''(z) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8}z,$$

és így

$$G'(1) = 1, \qquad G''(1) = 1$$

$$G'(z) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}z + \frac{3}{8}z^2,$$
$$G''(z) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8}z,$$

és így

$$G'(1) = 1, \qquad G''(1) = 1$$

és

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = 1,$$
$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2} = \sqrt{1 + 1 - 1^2} = 1.$$

2. feladat

Adjunk meg két olyan hatoldalú X és Y dobókockát, melyek nem cinkeltek (azaz minden oldalukra egyforma eséllyel esnek), az oldalaikon pozitív egészek állnak, és $X + Y$ eloszlása pont ugyanaz, mint szokásos (1-től 6-ig számozott) hatoldalú dobókockával két dobás összege, de X és Y nem a szokásos dobókockák.

2. feladat

Adjunk meg két olyan hatoldalú X és Y dobókockát, melyek nem cinkeltek (azaz minden oldalukra egyforma eséllyel esnek), az oldalaikon pozitív egészek állnak, és $X + Y$ eloszlása pont ugyanaz, mint szokásos (1-től 6-ig számozott) hatoldalú dobókockával két dobás összege, de X és Y nem a szokásos dobókockák.

Két szokásos dobás összegének a generátorfüggvénye

$$\left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6\right)^2 .$$

Ezt kéne másféle módon $G_1(z)G_2(z)$ szorzattá alakítani.

2. feladat

Először alakítsuk szorzattá egy darab szabályos dobókocka generátorfüggvényét.

$$\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 = \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1).$$

2. feladat

Először alakítsuk szorzattá egy darab szabályos dobókocka generátorfüggvényét.

$$\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 = \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1).$$

Tehát

$$\left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6\right)^2 =$$
$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

2. feladat

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

2. feladat

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

- Az $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ tényezőket muszáj $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ alakban kettészedni, mivel nem cinkelt dobókockákról van szó, tehát a valószínűségek $\frac{1}{6}$ egész többszörösei kell legyenek.

2. feladat

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

- Az $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ tényezőket muszáj $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ alakban kettészedni, mivel nem cinkelt dobókockákról van szó, tehát a valószínűségek $\frac{1}{6}$ egész többszörösei kell legyenek.
- A z^2 tényezőket muszáj $z \cdot z$ alakban kettészedni, különben valamelyik dobókockán lenne 0.

2. feladat

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

- Az $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ tényezőket muszáj $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ alakban kettészedni, mivel nem cinkelt dobókockákról van szó, tehát a valószínűségek $\frac{1}{6}$ egész többszörösei kell legyenek.
- A z^2 tényezőket muszáj $z \cdot z$ alakban kettészedni, különben valamelyik dobókockán lenne 0.
- A többi tényezőre $G(1) = 1$ alapján van még megkötés;

$$(1+z)|_{z=1} = 2, \qquad (z^2+z+1)|_{z=1} = 3$$

miatt ezeket a tényezőket is muszáj egy-egyben kettéosztani.

2. feladat

Az utolsó kettéosztandó tényező a $(z^2 - z + 1)^2$. Ennek értéke $z = 1$-ben 1, tehát ez nem jelent megkötést. Ha ezt is egy-egyben osztjuk szét, akkor visszakapjuk a két szabályos dobókockát.

2. feladat

Az utolsó kettéosztandó tényező a $(z^2 - z + 1)^2$. Ennek értéke $z = 1$-ben 1, tehát ez nem jelent megkötést. Ha ezt is egy-egyben osztjuk szét, akkor visszakapjuk a két szabályos dobókockát.

De ha mindkettőt egy oldalra rakjuk, akkor

$$
\begin{aligned}
G_1(z) &= \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1) = \frac{1}{6}z + \frac{2}{6}z^2 + \frac{2}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4, \\
G_2(z) &= \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1)^2 = \\
&= \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{6}z^8,
\end{aligned}
$$

a dobókockákra pedig ennek megfelelően a következő számok kerülnek:

- 1, 2, 2, 3, 3, 4;
- 1, 3, 4, 5, 6, 8.

3. feladat

Anna levelet küld Bélának. A posta megbízhatatlan; minden egyes napon $1/3$ eséllyel viszi be a levelet a postás a központba, az előzményektől függetlenül. Ha a levél beért a központba, minden egyes napon $1/5$ eséllyel feldolgozzák, az előzményektől függetlenül. Ha feldolgozták, onnan a kézbesítés fix 1 napot vesz igénybe. (Tehát legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik is a levelet.) Jelölje X azt, hogy a feladástól számítva hány nap alatt kézbesítik a levelet. Számítsuk ki X generátorfüggvényét és várható értékét.

3. feladat

Megoldás. X felírható

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

alakban, ahol

- X_1 az, hogy hány nap alatt viszi be a postás a központba,
- X_2 az, hogy hány nap alatt dolgozzák fel a központban,
- X_3 az, hogy hány nap alatt kézbesítik a feldolgozás után.

3. feladat

Megoldás. X felírható

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

alakban, ahol

- X_1 az, hogy hány nap alatt viszi be a postás a központba,
- X_2 az, hogy hány nap alatt dolgozzák fel a központban,
- X_3 az, hogy hány nap alatt kézbesítik a feldolgozás után.

X_1, X_2 és X_3 függetlenek. Milyen eloszlásúak?

3. feladat

$$X_1 \sim \mathrm{PGEO}(1/3), \qquad G_1(z) = \frac{1}{3-2z}, \qquad \mathbb{E}(X_1) = 2,$$

$$X_2 \sim \mathrm{PGEO}(1/5), \qquad G_2(z) = \frac{1}{5-4z}, \qquad \mathbb{E}(X_2) = 4,$$

$$X_3 = 1, \qquad G_3(z) = z, \qquad \mathbb{E}(X_3) = 1.$$

3. feladat

$$X_1 \sim \mathrm{PGEO}(1/3), \qquad G_1(z) = \frac{1}{3-2z}, \qquad \mathbb{E}(X_1) = 2,$$
$$X_2 \sim \mathrm{PGEO}(1/5), \qquad G_2(z) = \frac{1}{5-4z}, \qquad \mathbb{E}(X_2) = 4,$$
$$X_3 = 1, \qquad G_3(z) = z, \qquad \mathbb{E}(X_3) = 1.$$

(Azt, hogy pesszimista vagy sima geometriai, onnan lehet tudni, hogy „legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik” a levelet.)

3. feladat

$$X_1 \sim \mathrm{PGEO}(1/3), \qquad G_1(z) = \frac{1}{3-2z}, \qquad \mathbb{E}(X_1) = 2,$$
$$X_2 \sim \mathrm{PGEO}(1/5), \qquad G_2(z) = \frac{1}{5-4z}, \qquad \mathbb{E}(X_2) = 4,$$
$$X_3 = 1, \qquad G_3(z) = z, \qquad \mathbb{E}(X_3) = 1.$$

(Azt, hogy pesszimista vagy sima geometriai, onnan lehet tudni, hogy „legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik” a levelet.)

Tehát

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \frac{1}{3-2z} \cdot \frac{1}{5-4z} \cdot z,$$
$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 2 + 4 + 1 = 7.$$

7. feladat

Egy vizsga A és B részből áll. A B részen csak azok a diákok vehetnek részt, akik az A részen átmentek. Minden egyes diák $0,6$ valószínűséggel megy át az A részen (a többiektől függetlenül). Minden diák, aki átment az A részen, $0,5$ valószínűséggel megy át a B részen (újfent a többiektől függetlenül). 100 diák vesz részt a vizsgán. Jelölje X azok számát, akik átmentek az A részen, Y pedig azok számát, akik átmentek mindkét részen. Milyen eloszlású X? Számítsuk ki G_X-et (X generátorfüggvényét), majd ennek segítségével G_Y-t is. G_Y-ból mondjuk meg Y eloszlását.

7. feladat

Megoldás. Y felírható

$$Y = Z_1 + \cdots + Z_X,$$

alakban, ahol $Z_1, \ldots, Z_X$ az A részen átment diákok eredménye a B részen: Z_i értéke 1, ha a diák átment a B részen és 0, ha nem.

7. feladat

Megoldás. Y felírható

$$Y = Z_1 + \cdots + Z_X,$$

alakban, ahol $Z_1, \ldots, Z_X$ az A részen átment diákok eredménye a B részen: Z_i értéke 1, ha a diák átment a B részen és 0, ha nem. A Z_i-k független, azonos eloszlásúak (fae), közös generátorfüggvényük

$$G_Z(z) = 0.5 + 0.5z.$$

7. feladat

Megoldás. Y felírható

$$Y = Z_1 + \cdots + Z_X,$$

alakban, ahol $Z_1, \ldots, Z_X$ az A részen átment diákok eredménye a B részen: Z_i értéke 1, ha a diák átment a B részen és 0, ha nem. A Z_i-k független, azonos eloszlásúak (fae), közös generátorfüggvényük

$$G_Z(z) = 0.5 + 0.5z.$$

$X \sim \mathrm{BIN}(100, 0.6)$, tehát

$$G_X(z) = (0.4 + 0.6z)^{100}, \qquad \text{és}$$
$$G_Y(z) = G_X(G_Z(z)) = (0.4 + 0.6(0.5 + 0.5z))^{100} = (0.7 + 0.3z)^{100},$$

7. feladat

Megoldás. Y felírható

$$Y = Z_1 + \cdots + Z_X,$$

alakban, ahol $Z_1, \ldots, Z_X$ az A részen átment diákok eredménye a B részen: Z_i értéke 1, ha a diák átment a B részen és 0, ha nem. A Z_i-k független, azonos eloszlásúak (fae), közös generátorfüggvényük

$$G_Z(z) = 0.5 + 0.5z.$$

$X \sim \mathrm{BIN}(100, 0.6)$, tehát

$$G_X(z) = (0.4 + 0.6z)^{100}, \qquad \text{és}$$
$$G_Y(z) = G_X(G_Z(z)) = (0.4 + 0.6(0.5 + 0.5z))^{100} = (0.7 + 0.3z)^{100},$$

ami éppen a BIN(100, 0.3) generátorfüggvénye.

7. feladat

Egy másik lehetőség annak indoklására, hogy $Y \sim \mathrm{BIN}(100, 0.3)$ a következő.

7. feladat

Egy másik lehetőség annak indoklására, hogy $Y \sim \mathrm{BIN}(100, 0.3)$ a következő.Minden egyes diákra annak a valószínűsége, hogy átmegy az A és a B részen is, teljes valószínűség alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{átmegy B-n}) &= \mathbb{P}(\text{átmegy B-n}|\text{átmegy A-n})\mathbb{P}(\text{átmegy A-n}) + \\ &+ \mathbb{P}(\text{átmegy B-n}|\text{nem megy át A-n})\mathbb{P}(\text{nem megy át A-n}) = \\ &= 0.5 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.3,\end{aligned}$$

tehát mind a 100 diák a többiektől függetlenül 0.3 eséllyel megy át A-n és B-n is.

Ez megfogalmazható a következő általános lemmában.

Lemma

Ha $N \sim BIN(n, p)$ *és* $X_1, X_2, \ldots$ *fae Bernoulli eloszlásúak* q *paraméterrel, akkor*

$$Y = X_1 + \cdots + X_N$$

eloszlása $BIN(n, pq)$.