Elágazó folyamatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/10/29

Definíció

Kezdetben egyetlen egyed van.

Definíció

Kezdetben egyetlen egyed van.

Neki van véletlen számú *utóda*.

Definíció

Kezdetben egyetlen egyed van.

Neki van véletlen számú *utóda*.

Minden utódjának szintén van véletlen számú utóda, ugyanolyan eloszlással, függetlenül a többiektől.

Definíció

Kezdetben egyetlen egyed van.

Neki van véletlen számú *utóda*.

Minden utódjának szintén van véletlen számú utóda, ugyanolyan eloszlással, függetlenül a többiektől.

Az ő utódaiknak is van véletlen számú utóda ugyanolyan eloszlással függetlenül a többiektől, és így tovább.

Definíció

Kezdetben egyetlen egyed van.

Neki van véletlen számú *utóda*.

Minden utódjának szintén van véletlen számú utóda, ugyanolyan eloszlással, függetlenül a többiektől.

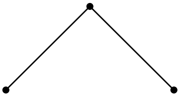
Az ő utódaiknak is van véletlen számú utóda ugyanolyan eloszlással függetlenül a többiektől, és így tovább.

Az így kapott folyamat egy *elágazó folyamat* vagy *Galton-Watson fa*.

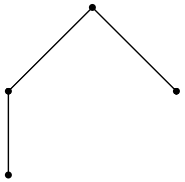
Példa

-

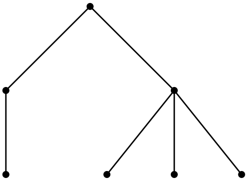
Példa



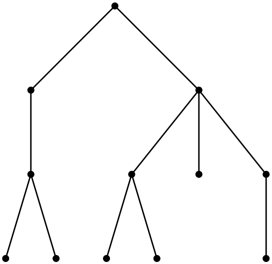
Példa



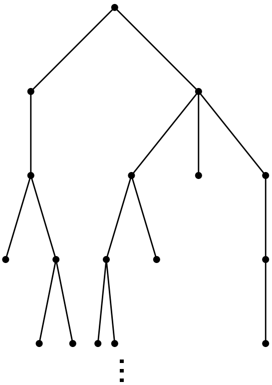
Példa



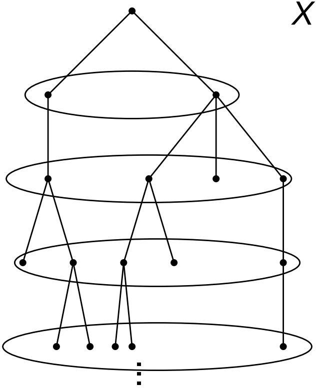
Példa



Példa



Példa



$X_0 = 1$ (0. generáció)

X_1 (1. generáció)

X_2 (2. generáció)

X_3 (3. generáció)

$\vdots$

PéIdas

Galton és Watson eredetileg a nemesi nevek leszármazását vizsgálták Angliában.

Példas

Galton és Watson eredetileg a nemesi nevek leszármazását vizsgálták Angliában.

További példák:

- járványterjedés
- információ terjedése
- nukleáris láncreakció

Kérdések

Kérdések:

- A folyamat kihal vagy örökké folytatódik?
- Mi X_n (az n-edik generáció) eloszlása? $\mathbb{E}(X_n) =?$
- Mi $N = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$, a folyamat teljes egyedszámának az eloszlása?

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

X_2 egy X_1 tagszámú összeg, így a generátorfüggvénye

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

X_2 egy X_1 tagszámú összeg, így a generátorfüggvénye $G(G(z))$.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

X_2 egy X_1 tagszámú összeg, így a generátorfüggvénye $G(G(z))$.

Hasonlóan X_3 generátorfüggvénye $G(G(G(z)))$, és így tovább.

Utódeloszlás

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utódeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

X_2 egy X_1 tagszámú összeg, így a generátorfüggvénye $G(G(z))$.

Hasonlóan X_3 generátorfüggvénye $G(G(G(z)))$, és így tovább.

Általában X_n generátorfüggvénye $\underbrace{G(\dots G(}_{n} z) \dots)$.

X_n várható értéke

Lemma

$$\mathbb{E}(X_n) = (\mathbb{E}(X_1))^n = (G'(1))^n.$$

Biz. X_n generátorfüggvénye $G(\dots G(z)\dots)$, ahol G n-szer szerepel. Ennek a deriváltját kell kiszámítanunk a $z = 1$ helyen:

$$\underbrace{G(\dots G}_{n}(z)\dots)'\Big|_{z=1} =$$

$$= G'(\underbrace{G(\dots G}_{n-1}(z)\dots)\Big|_{z=1} \cdot G'(\underbrace{G(\dots G}_{n-2}(z)\dots)\Big|_{z=1} \cdots G'(z)\Big|_{z=1} =$$

$$\overset{G(1)=1}{=} G'(1) \cdot G'(1) \cdots G'(1) = (G'(1))^n.$$

Osztályozás

A folyamat viselkedése nagyban függ $G'(1)$ értékétől.

Osztályozás

A folyamat viselkedése nagyban függ $G'(1)$ értékétől.

Hogyan viselkedik $\mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$ amint $n \to \infty$?

Osztályozás

A folyamat viselkedése nagyban függ $G'(1)$ értékétől.

Hogyan viselkedik $\mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$ amint $n \to \infty$?

- Ha $G'(1) < 1$, minden egyednek átlagosan *kevesebb, mint 1* utóda van, azaz a generációk átlagban egyre kisebbek, és $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ exponenciálisan gyorsan.
- Ha $G'(1) = 1$, minden egyednek átlagosan *1* utóda van, és $\mathbb{E}(X_n) = 1$.
- Ha $G'(1) > 1$, minden egyednek átlagosan *több, mint 1* utóda van, és a generációk átlagosan egyre nagyobbak lesznek, és $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$ exponenciálisan gyorsan.

Osztályozás

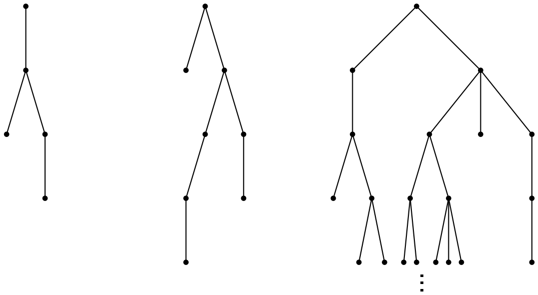
Ez alapján természetes az elágazó folyamatokat 3 osztályra osztani $G'(1)$ értéke alapján:

- Ha $G'(1) < 1$, a folyamat *szubkritikus*.
- Ha $G'(1) = 1$, a folyamat *kritikus*.
- Ha $G'(1) > 1$, a folyamat *szuperkritikus*.

Osztályozás

Ez alapján természetes az elágazó folyamatokat 3 osztályra osztani $G'(1)$ értéke alapján:

- Ha $G'(1) < 1$, a folyamat *szubkritikus*.
- Ha $G'(1) = 1$, a folyamat *kritikus*.
- Ha $G'(1) > 1$, a folyamat *szuperkritikus*.



Kihalás valószínűsége

A kihalás az az esemény, hogy egy idő után semelyik egyednek nincs több utóda.

Kihalás valószínűsége

A kihalás az az esemény, hogy egy idő után semelyik egyednek nincs több utóda.

Tétel

$$\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = z^*,$$

ahol z^* *a legkisebb nemnegatív megoldása a*

$$G(z) = z$$

egyenletnek.

Kihalás valószínűsége

Biz. $X_n = 0$ az az esemény, hogy a folyamat kihal az n-edik generációban vagy korábban, a kihalás pedig az az esemény, hogy *valamelyik* generáció üres, azaz

$$\{\text{kihalás}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}.$$

Kihalás valószínűsége

Biz. $X_n = 0$ az az esemény, hogy a folyamat kihal az n-edik generációban vagy korábban, a kihalás pedig az az esemény, hogy *valamelyik* generáció üres, azaz

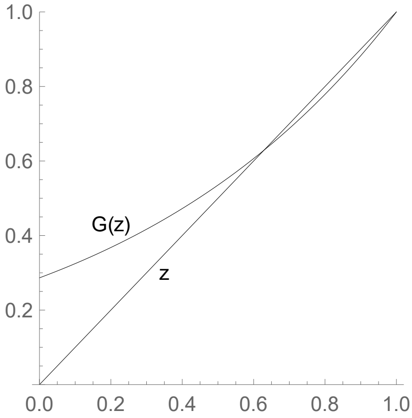
$$\{\text{kihalás}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}.$$

Mivel X_n generátorfüggvénye $\underbrace{G(\dots G}_{n}(z)\dots)$, és $\mathbb{P}(X_n = 0)$ növekvő, ezért

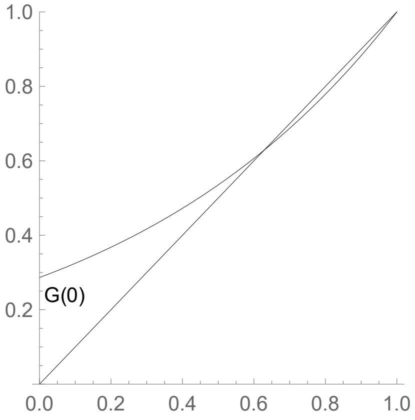
$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{G(\dots G}_{n}(0)\dots).$$

Ezt a limeszt kell kiszámítanunk.

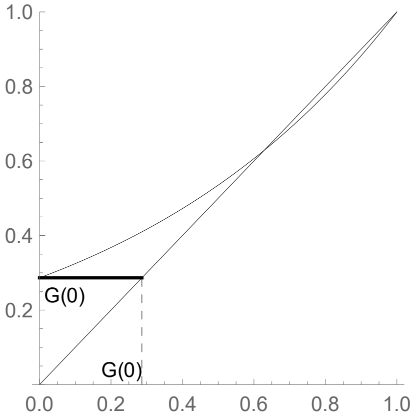
Kihalás valószínűsége

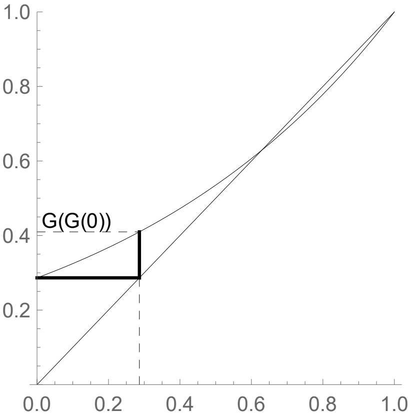


Kihalás valószínűsége

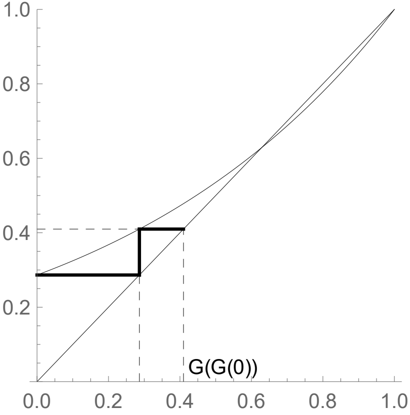


Kihalás valószínűsége

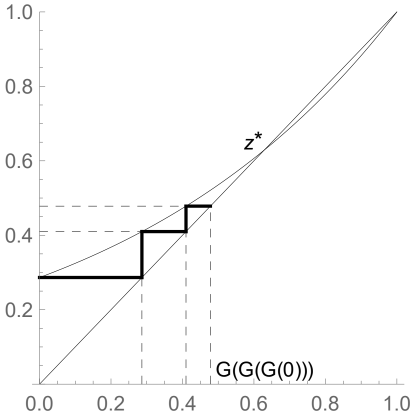



1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
G(G(0))
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

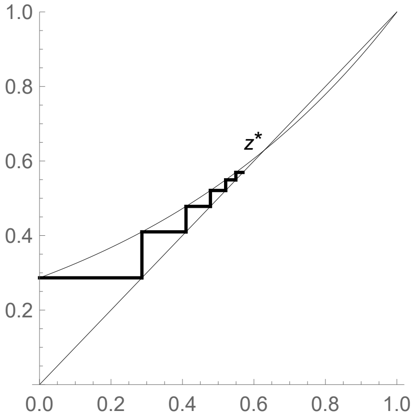
Kihalás valószínűsége



Kihalás valószínűsége



Kihalás valószínűsége



Kihalás valószínűsége

Tétel

(a) *Szubkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$.

(b) *Kritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$, *kivéve azt a determinisztikus folyamatot, amelyre* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$.

(c) *Szuperkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) < 1$.

Kihalás valószínűsége

Tétel

(a) *Szubkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$.

(b) *Kritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$, *kivéve azt a determinisztikus folyamatot, amelyre* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$.

(c) *Szuperkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) < 1$.

Biz. Az előző tétel szerint $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Kihalás valószínűsége

Tétel

(a) *Szubkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$.

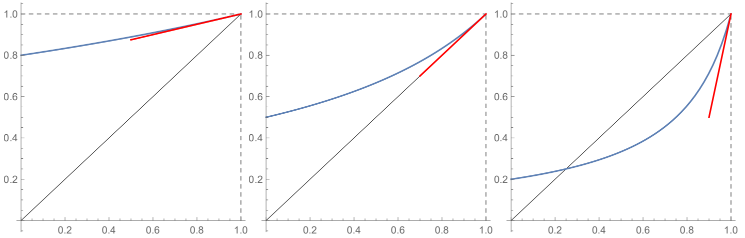
(b) *Kritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) = 1$, *kivéve azt a determinisztikus folyamatot, amelyre* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$.

(c) *Szuperkritikus folyamatra* $\mathbb{P}(\textit{kihalás}) < 1$.

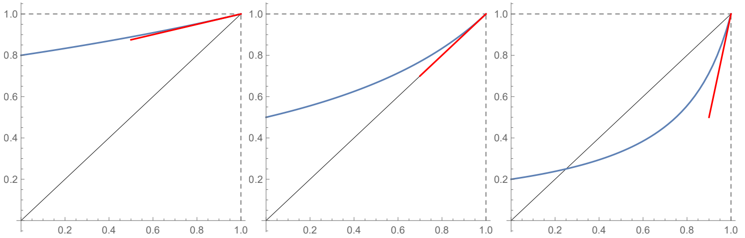
Biz. Az előző tétel szerint $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Mivel $G(1) = 1$, ezért $z = 1$ mindig gyöke $G(z) = z$-nek. Mivel $G(z)$ konvex $[0, 1]$-en, ezért $[0, 1]$-en legfeljebb két metszéspontja lehet a z egyenessel; a kérdés az, van-e az 1-en kívül még egy másik is.

Kihalás valószínűsége



$G'(1) < 1$ $\qquad$ $G'(1) = 1$ $\qquad$ $G'(1) > 1$



$G'(1) < 1$ $G'(1) = 1$ $G'(1) > 1$

$G'(1) > 1$ esetén $G(z)$ grafikonja az 1 közelében a z függvény alatt van, viszont 0 közelében már felette, tehát valahol 0 és 1 között metszik egymást.
$G'(1) \leq 1$ esetén $G(z)$ grafikonja végig a z függvény felett halad, tehát nincs másik gyök 0 és 1 között.

Kihalás valószínűsége

A kihalás valószínűségét összefoglalva:

- Ha a folyamat szubkritikus vagy kritikus (kivéve a determinisztikus $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ folyamatot), akkor $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = 1$ automatikusan teljesül.
- Ha a folyamat szuperkritikus, akkor z^*-ot a $G(z) = z$ egyenletből kell kiszámolnunk.

Példa

Példa. Ottónak 0, 1, 2 vagy 3 gyermeke születik, mindegyik $1/4$ valószínűséggel. Minden leszármazottjának ugyanilyen eloszlású a gyermekeinek száma, függetlenül a többiektől.

$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs gyereke}) = ?$

$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs unokája}) = ?$

$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs dédunokája}) = ?$

$\mathbb{P}(\text{Ottónak leszármazottai előbb-utóbb kihalnak}) = ?$

Példa

Az utódeloszlás generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3.$$

Innen

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs gyereke}) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = G(0) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs unokája}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) =$$

$$G(G(0)) = G\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{85}{256} \approx 0.332,$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs dédunokája}) = \mathbb{P}(X_3 = 0) =$$

$$G(G(G(0))) = G\left(\frac{85}{256}\right) \approx 0.370.$$

Példa

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Példa

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

$G'(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus, tehát $z^* < 1$ és meg kell oldanunk a $G(z) = z$ egyenletet.

Példa

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

$G'(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus, tehát $z^* < 1$ és meg kell oldanunk a $G(z) = z$ egyenletet.

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 = z,$$

ahonnan $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$.

Példa

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

$G'(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus, tehát $z^* < 1$ és meg kell oldanunk a $G(z) = z$ egyenletet.

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 = z,$$

ahonnan $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$. Ez ugyan egy harmadfokú egyenlet, de $z = 1$ mindig megoldása $G(z) = z$-nek, tehát $(z - 1)$ kiemelhető:

$$z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z - 1)(z^2 + 2z - 1),$$

Példa

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

$G'(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus, tehát $z^* < 1$ és meg kell oldanunk a $G(z) = z$ egyenletet.

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 = z,$$

ahonnan $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$. Ez ugyan egy harmadfokú egyenlet, de $z = 1$ mindig megoldása $G(z) = z$-nek, tehát $(z - 1)$ kiemelhető:

$$z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z - 1)(z^2 + 2z - 1),$$

aminek a gyökei $z_1 = 1$, $z_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2.414$ és $z_3 = z^* = -1 + \sqrt{2} \approx 0.414$.

Túlélés valószínűsége

Tétel

(a) *Szubkritikus elágazó folyamatra*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \to 0$$

exponenciálisan gyorsan, amint $n \to \infty$.

(b) *Szuperkritikus elágazó folyamatra*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \to 1 - \mathbb{P}(\textit{kihalás})$$

exponenciálisan gyorsan, amint $n \to \infty$.

(c) *Kritikus elágazó folyamatra (kivéve a determinisztikus* $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ *folyamatot)*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) = O(1/n)$$

Túlélés valószínűsége

(a) $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n.$

(a) $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$.

(b) A $[0, z^*]$ intervallumon

$$|G'(z)| \leq |G'(z^*)| = c < 1,$$

Túlélés valószínűsége

(a) $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$.

(b) A $[0, z^*]$ intervallumon

$$|G'(z)| \leq |G'(z^*)| = c < 1,$$

így Lagrange-középértéktétel miatt tetszőleges $z \in [0, z^*]$-ra

$$|G(z) - z^*| = |G(z) - G(z^*)| \leq c|z - z^*|,$$

Túlélés valószínűsége

(a) $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$.

(b) A $[0, z^*]$ intervallumon

$$|G'(z)| \leq |G'(z^*)| = c < 1,$$

így Lagrange-középértéktétel miatt tetszőleges $z \in [0, z^*]$-ra

$$|G(z) - z^*| = |G(z) - G(z^*)| \leq c|z - z^*|,$$

tehát speciálisan $z = 0$-ra

$$|\underbrace{G(\dots G}_{n}(0)\dots) - z^*| \leq c^n|0 - z^*| \leq c^n.$$

Túlélés valószínűsége

(a) $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$.

(b) A $[0, z^*]$ intervallumon

$$|G'(z)| \leq |G'(z^*)| = c < 1,$$

így Lagrange-középértéktétel miatt tetszőleges $z \in [0, z^*]$-ra

$$|G(z) - z^*| = |G(z) - G(z^*)| \leq c|z - z^*|,$$

tehát speciálisan $z = 0$-ra

$$|\underbrace{G(\dots G}_{n}(0)\dots) - z^*| \leq c^n|0 - z^*| \leq c^n.$$

(c) nem biz.

Populáció teljes mérete

Jelölje $N = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ a populáció teljes méretét (ha az elágazó folyamat nem hal ki, akkor $N = \infty$). N generátorfüggvényét jelölje $G_N(z)$ (szuperkritikus folyamatra G_N hiányos generátorfüggvény).

Tétel

(a)

$$\mathbb{E}(N) = \begin{cases} \frac{1}{1-G'(1)} & ha \quad G'(1) < 1 \\ \infty & ha \quad G'(1) \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$G_N(z) = zG(G_N(z)).$$

Populáció teljes mérete

Jelölje $N = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ a populáció teljes méretét (ha az elágazó folyamat nem hal ki, akkor $N = \infty$). N generátorfüggvényét jelölje $G_N(z)$ (szuperkritikus folyamatra G_N hiányos generátorfüggvény).

Tétel

(a)

$$\mathbb{E}(N) = \begin{cases} \frac{1}{1-G'(1)} & ha \quad G'(1) < 1 \\ \infty & ha \quad G'(1) \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$G_N(z) = zG(G_N(z)).$$

Biz.

(a)

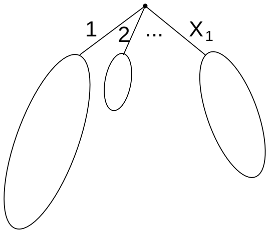
$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (G'(1))^n.$$

Populáció teljes mérete

(b)

$$N = 1 + N_1 + \cdots + N_{X_1},$$

ahol X_1 az első generáció létszáma, és $N_1, \dots N_{X_1}$ az első generáció egyedeihez tartozó részfolyamatok mérete. Az N_i-k függetlenek és eloszlásuk megegyezik N eloszlásával, tehát a jobboldalon szereplő véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $zG(G_N(z))$, a baloldal generátorfüggvénye pedig $G_N(z)$.



Populáció teljes mérete

Megjegyzések. A
$$G_N(z) = zG(G_N(z))$$
egyenlet megoldható külön-külön minden z-re.

Populáció teljes mérete

Megjegyzések. A

$$G_N(z) = zG(G_N(z))$$

egyenlet megoldható külön-külön minden z-re.

A tétel nem állítja, hogy $G_N(z)$ az egyetlen megoldás, csak azt, hogy a keresett $G_N(z)$ a megoldások egyike.

Populáció teljes mérete

Megjegyzések. A

$$G_N(z) = zG(G_N(z))$$

egyenlet megoldható külön-külön minden z-re.

A tétel nem állítja, hogy $G_N(z)$ az egyetlen megoldás, csak azt, hogy a keresett $G_N(z)$ a megoldások egyike.

$$G_N(1) = z^* = \mathbb{P}(\text{kihalás}).$$

Populáció teljes mérete

Megjegyzések. A

$$G_N(z) = zG(G_N(z))$$

egyenlet megoldható külön-külön minden z-re.

A tétel nem állítja, hogy $G_N(z)$ az egyetlen megoldás, csak azt, hogy a keresett $G_N(z)$ a megoldások egyike.

$$G_N(1) = z^* = \mathbb{P}(\text{kihalás}).$$

Ha $G'(1) < 1$, akkor

$$G_N'(1) = \mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)},$$

míg ha $G'(1) > 1$, akkor

$$G_N'(1) = \mathbb{E}(N|N < \infty).$$

Populáció teljes mérete

Példa. Ha $X_1 \sim PGEO(1/3)$, akkor

$$G(z) = \frac{1}{3 - 2z},$$

és $G_N(z) = zG(G_N(z))$ egy másodfokú egyenletre vezet, amelynek megoldásai

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z}}{4}.$$

Populáció teljes mérete

Példa. Ha $X_1 \sim PGEO(1/3)$, akkor

$$G(z) = \frac{1}{3 - 2z},$$

és $G_N(z) = zG(G_N(z))$ egy másodfokú egyenletre vezet, amelynek megoldásai

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z}}{4}.$$

A két megoldás közül az a valódi, amelyikre $G_N(0) = 0$ teljesül. Ebben az esetben ez a $(-)$-os, tehát

$$G_N(z) = \frac{3 - \sqrt{9 - 8z}}{4}.$$

Dualitás

Tétel (Elágazó folyamat dualitása)

Tekintsünk egy szuperkritikus elágazó folyamatot, melynek utódeloszlása

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p_k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Legyen a kihalás valószínűsége $z^* < 1$. *Ezen folyamat feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal, megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása*

$$\mathbb{P}(X_1' = k) = (z^*)^{k-1} p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Tétel (Elágazó folyamat dualitása)

Tekintsünk egy szuperkritikus elágazó folyamatot, melynek utódeloszlása

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p_k, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Legyen a kihalás valószínűsége $z^* < 1$. Ezen folyamat feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihal, megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása

$$\mathbb{P}(X_1' = k) = (z^*)^{k-1} p_k, \qquad k = 1, 2, \dots$$

(A teljes folyamat eloszlásáról van szó, azaz arról a valószínűségi mértékről, amely megmondja, hogy a teljes folyamat mekkora valószínűséggel vesz fel adott véges vagy végtelen fákat.)

Nem biz.

Dualitás

Speciális eset: Poisson elágazó folyamat dualitása.

Dualitás

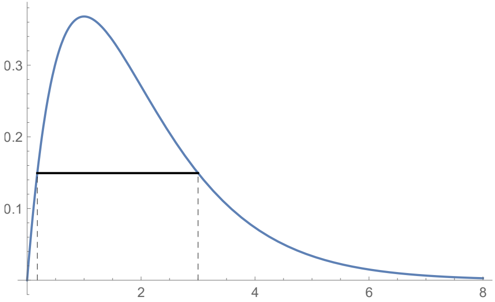
Speciális eset: Poisson elágazó folyamat dualitása.

Ha az eredeti szubkritikus folyamat utódeloszlása POI(μ), ahol $\mu > 1$, akkor, feltéve, hogy a folyamat kihal, ezen folyamat feltételes eloszlása megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása POI(λ), ahol λ a

$$\lambda e^{-\lambda} = \mu e^{-\mu}$$

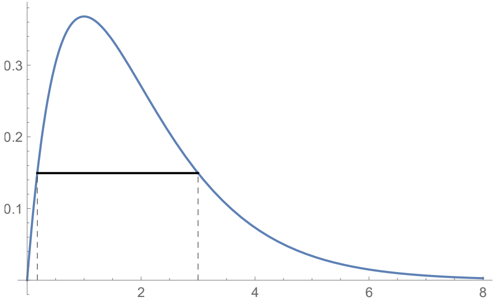
egyenlet azon megoldása, amelyre $\lambda < 1$.

Poisson elágazó folyamat dualitása



A $\lambda e^{-\lambda}$ függvény grafikonja. Érdekes módon minél nagyobb μ, annál kisebb λ.

Poisson elágazó folyamat dualitása



A $\lambda e^{-\lambda}$ függvény grafikonja. Érdekes módon minél nagyobb μ, annál kisebb λ.

Egy lehetséges interpretáció, hogy egy erősen szuperkritikus elágazó folyamat csak úgy tud kihalni, ha ez nagyon hamar bekövetkezik, és olyankor egy erősen szubkritikus elágazó folyamatra hasonlít.

Összefoglalás

	szubkritikus	kritikus	szuperkritikus
$\mathbb{E}(X_n)$	$(G'(1))^n$		
$\mathbb{P}(X_n = 0)$	$\underbrace{G(\dots G}_{n}(0)\dots)$		
$\mathbb{P}(\text{kihalás})$	1	1	$z^* < 1$
$\mathbb{E}(N)$	$\frac{1}{1-G'(1)}$	∞	∞

z^* a $z = G(z)$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Véges populáció

Az elágazó folyamat egy olyan modell, amelynek potenciálisan végtelen a mérete. Véges populáción zajló folyamatok modellezésénél (pl. járványterjedés) emiatt mindenképpen csak közelítés. A közelítés annál pontosabb, minél kisebb a folyamat mérete a teljes populációhoz képest.

Véges populáció

Az elágazó folyamat egy olyan modell, amelynek potenciálisan végtelen a mérete. Véges populáción zajló folyamatok modellezésénél (pl. járványterjedés) emiatt mindenképpen csak közelítés. A közelítés annál pontosabb, minél kisebb a folyamat mérete a teljes populációhoz képest.

Véges populáció esetén az, hogy az elágazó folyamat végtelen, annak felel meg, hogy a folyamat egyedszáma összemérhető a teljes populációval. A kihalás pedig annak felel meg, hogy a folyamat mérete sokkal kisebb, mint a teljes populáció mérete.

Véges populáció

Az elágazó folyamat egy olyan modell, amelynek potenciálisan végtelen a mérete. Véges populáción zajló folyamatok modellezésénél (pl. járványterjedés) emiatt mindenképpen csak közelítés. A közelítés annál pontosabb, minél kisebb a folyamat mérete a teljes populációhoz képest.

Véges populáció esetén az, hogy az elágazó folyamat végtelen, annak felel meg, hogy a folyamat egyedszáma összemérhető a teljes populációval. A kihalás pedig annak felel meg, hogy a folyamat mérete sokkal kisebb, mint a teljes populáció mérete.

Ajánlott irodalom: Janson–Luczak–Rucinski: Random Graphs.

1. feladat

Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X_1 másik embernek, ahol X_1 pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.

1. feladat

(a) Mennyi X_1 várható értéke?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció" létszáma 0)?

(c) Jelölje X_3 a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X_3)$ értékét.

(d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)

(e) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

1. feladat

Megoldás. Jelölje $G(z)$ az utódeloszlás generátorfüggvényét:

$$G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}.$$

(a)

$$\mathbb{E}(X_1) = G'(1) = \frac{1-p}{p}.$$

1. feladat

Megoldás. Jelölje $G(z)$ az utódeloszlás generátorfüggvényét:

$$G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}.$$

(a)

$$\mathbb{E}(X_1) = G'(1) = \frac{1-p}{p}.$$

$p = 0.4$ esetén $\mathbb{E}(X_1) = 3/2 = 1.5 > 1$, azaz a folyamat szuperkritikus.

$p = 0.6$ esetén, $\mathbb{E}(X_1) = 2/3 \approx 0.667 < 1$, azaz a folyamat szubkritikus.

1. feladat

(b)

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = G(G(0)) = G(p) = \frac{p}{1-(1-p)p}.$$

$p = 0.4$-re $\mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.526.$

$p = 0.6$-re $\mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.789.$

1. feladat

(b)

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = G(G(0)) = G(p) = \frac{p}{1-(1-p)p}.$$

$p = 0.4$-re $\mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.526.$

$p = 0.6$-re $\mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.789.$

(c)

$$\mathbb{E}(X_3) = (G'(1))^3 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3.$$

$p = 0.4$-re $\mathbb{E}(X_3) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3.375.$

$p = 0.6$-re $\mathbb{E}(X_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.296.$

1. feladat

(d) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, a legkisebb nemnegatív gyöke a

$$z = G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

egyenletnek.

1. feladat

(d) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, a legkisebb nemnegatív gyöke a

$$z = G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

egyenletnek. Ez egy másodfokú egyenletre vezet, a megoldásai

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{p}{1-p}.$$

1. feladat

(d) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, a legkisebb nemnegatív gyöke a

$$z = G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

egyenletnek. Ez egy másodfokú egyenletre vezet, a megoldásai

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{p}{1-p}.$$

$p = 0.4$-re $z_2 < z_1$, tehát $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = z_2 = 2/3$, és $\mathbb{P}(\text{a folyamat sosem hal ki}) = 1/3$.

1. feladat

(d) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, a legkisebb nemnegatív gyöke a

$$z = G(z) = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

egyenletnek. Ez egy másodfokú egyenletre vezet, a megoldásai

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = \frac{p}{1-p}.$$

$p = 0.4$-re $z_2 < z_1$, tehát $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = z_2 = 2/3$, és

$\mathbb{P}(\text{a folyamat sosem hal ki}) = 1/3$.

$p = 0.6$-re $z_1 < z_2$, tehát $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = z_1 = 1$, és
$\mathbb{P}(\text{a folyamat sosem hal ki}) = 0$.

1. feladat

(e) $p = 0.4$ esetén a folyamat szuperkritikus és

$$\mathbb{E}(N) = \infty.$$

1. feladat

(e) $p = 0.4$ esetén a folyamat szuperkritikus és

$$\mathbb{E}(N) = \infty.$$

$p = 0.6$ esetén a folyamat szubkritikus és

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 2/3} = 3.$$

1. feladat

Összefoglalva:

	$p = 0.4$	$p = 0.6$
$\mathbb{E}(X_1)$	1.5	0.667
$\mathbb{P}(X_2 = 0)$	0.526	0.789
$\mathbb{E}(X_3)$	3.375	0.296
$\mathbb{P}(\text{sosem hal ki})$	0.333	0
$\mathbb{E}(N)$	∞	3

3. feladat

Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G. Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!

(a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k.

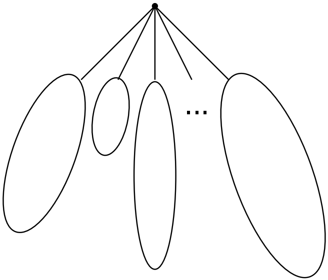
(b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

3. feladat

Megoldás.

(a) Feltéve, hogy $X_1 = k$, az elágazó folyamatnak k fae ága van, melyek mindegyikének az eloszlása megegyezik az eredeti folyamat eloszlásával. Tehát minden ág z^* valószínűséggel hal ki a többiektől függetlenül, és

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = (z^*)^k.$$



3. feladat

(b)

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}|X_1 > 0) = \frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}, X_1 > 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}) - \mathbb{P}(\text{kihalás}, X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} =$$

$$\frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}) - \mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} =$$

$$\frac{z^* - G(0)}{1 - G(0)}.$$

4. feladat

Egy lánclevél arra kéri olvasóját, hogy továbbítsa 12 másik embernek. Aki megkapja, azoknak a 92%-a törli a levelet továbbítás nélkül, 8% azonban továbbítja 12 másik embernek.

(a) Modellezzük a helyzetet elágazó folyamattal. Mi az utódeloszlás várható értéke? Szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus a folyamat?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a levél terjedése előbb-utóbb megáll?

(c) Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, mennyi a lánclevél "élettartama" során elküldött levelek számának várható értéke?

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

generátorfüggvénye

$$G(z) = 0.92 + 0.08z^{12},$$

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

generátorfüggvénye

$$G(z) = 0.92 + 0.08z^{12},$$

várható értéke

$$G'(1) = 0.96z^{11}\Big|_{z=1} = 0.96 < 1,$$

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

generátorfüggvénye

$$G(z) = 0.92 + 0.08z^{12},$$

várható értéke

$$G'(1) = 0.96z^{11}\big|_{z=1} = 0.96 < 1,$$

tehát a folyamat szubkritikus.

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

generátorfüggvénye

$$G(z) = 0.92 + 0.08z^{12},$$

várható értéke

$$G'(1) = 0.96z^{11}\Big|_{z=1} = 0.96 < 1,$$

tehát a folyamat szubkritikus.

(b) Szubkritikus folyamatra $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$, tehát 1 valószínűséggel a levél terjedése előbb-utóbb megáll.

4. feladat

(c) A folyamat méretét jelölje N; ekkor

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 0.96} = 25.$$

4. feladat

(c) A folyamat méretét jelölje N; ekkor

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 0.96} = 25.$$

Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, a folyamatnak 12 ága van, melyek mindegyike átlagosan 25 embert tartalmaz. Tehát

$$\mathbb{E}(N | X_1 = 12) = 12 \cdot 25 + 1$$

(mivel a szerző a 12 ághoz képest még $+1$ egyed a folyamatban).

4. feladat

(c) A folyamat méretét jelölje N; ekkor

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 0.96} = 25.$$

Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, a folyamatnak 12 ága van, melyek mindegyike átlagosan 25 embert tartalmaz. Tehát

$$\mathbb{E}(N|X_1 = 12) = 12 \cdot 25 + 1$$

(mivel a szerző a 12 ághoz képest még $+1$ egyed a folyamatban).

Viszont az elküldött levelek számának várható értéke ennél eggyel kevesebb, mivel ott nem kell a szerzőt számolni. Tehát az elküldött levelek számának várható értéke 300.

5. feladat

Dömötör kap egy beadandó feladatot a tanárától, amit 50% eséllyel old meg helyesen. Amennyiben elrontja, kap 2 további feladatot, melyeket szintén 50% eséllyel old meg helyesen (az előzményektől függetlenül). Minden további hibás megoldás „jutalma” is két további feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy Dömötörnek egy idő után nem kell további feladatokat megoldania? Várhatóan hány feladatot kell eddig megoldania összesen?

5. feladat

Dömötör kap egy beadandó feladatot a tanárától, amit 50% eséllyel old meg helyesen. Amennyiben elrontja, kap 2 további feladatot, melyeket szintén 50% eséllyel old meg helyesen (az előzményektől függetlenül). Minden további hibás megoldás „jutalma” is két további feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy Dömötörnek egy idő után nem kell további feladatokat megoldania? Várhatóan hány feladatot kell eddig megoldania összesen?

Megoldás. Legyenek a feladatok az egyedek, és egy feladatnak 0 vagy 2 utóda van attól függően, Dömötör helyesen oldja-e meg. Az így kapott elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2.$$

5. feladat

$$G'(1) = 1,$$

így a folyamat kritikus (és nem a determinisztikus folyamat), tehát

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1,$$

ami jó hír.

5. feladat

$$G'(1) = 1,$$

így a folyamat kritikus (és nem a determinisztikus folyamat), tehát

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1,$$

ami jó hír.

Viszont ha N jelöli az összes feladatok számát, akkor

$$\mathbb{E}(N) = \infty,$$

ami nem annyira.